

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

624.07
Ш1-87

К. Штамм Х. Витте

Многослойные конструкции

Перевод с немецкого
Т. Н. Орешниной

Под редакцией канд. техн. наук
С. С. Кармилова



Москва Стройиздат 1983

Рекомендовано к изданию ЦНИИСК

Штамм К., Витте Г. Многослойные конструкции /Пер. с нем. Т.Н. Орешкиной; Под ред. С.С. Кармилова. — М.: Стройиздат. 1983. — 300 с., ил. — Перевод изд.: Sandwichkonstruktionen/K. Stamm, H. Witte. — Wien, New York, 1974.

Рассмотрена теория расчета трехслойных балок и панелей на изгиб, кручение и устойчивость при различных способах обшивки с учетом истинной работы трехслойной конструкции как при плоских, так и при гофрированных обшивках. Приведены сведения о статических и динамических испытаниях. Изложена технология изготовления элементов слоистых конструкций, разбираются вопросы их проектирования, в том числе способы стыкования и крепления. Неоспоримое достоинство книги — систематизированное изложение всех вопросов, связанных с расчетом трехслойных пегких конструкций.

Для научных работников научно-исследовательских и проектных организаций.

Табл. 34, ил. 189, список лит.: 41 назв.

Ш 3202000000 — 418 103—82.
047 (01) — 83

© 1974 Springer - Verlag/Wien

© Перевод на русский язык. Предисловие к русскому изданию. Стройиздат, 1983

Для снижения затрат труда и сокращения потребности в рабочей силе при изготовлении и монтаже строительных конструкций важное значение имеет применение полносборных ограждающих конструкций — стеновых и кровельных панелей.

Поиски рациональной конструкции стеновых ограждений приводят к выводу, что ограждающие конструкции должны быть оптимизированы с учетом всего спектра функциональных требований — несущей способности, минимума массы, долговечности, требуемого термического сопротивления и звукоизоляции, низкой стоимости изготовления и быстрого монтажа. Наиболее полно всем этим требованиям удовлетворяют трехслойные панели с наружными слоями из листовых материалов — металла, асбестоцемента и средним слоем из пенопластов.

В книге австрийских исследователей К. Штамма и Х. Витте подробно рассматриваются вопросы расчета трехслойных панелей, именуемых здесь многослойными. Описанные принципы расчета аналогичны принятым советскими исследователями. В то же время знакомство с ними расширит наши познания в этой области.

В книге приведены примеры численных решений, облегчающие изучение теории расчета. Ценным также является и то, что расчет конструкций показан несколькими способами, что позволяет сравнить удобство и применимость того или иного способа в зависимости от расчетной схемы конструкции. Интересны также данные по методике расчета многослойных конструкций на звуковое давление.

Настоящее издание может быть использовано в качестве вспомогательного материала при разработке трехслойных панелей, а так же как методический материал для преподавателей и студентов строительных вузов.

Канд. техн. наук С. Кармилов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Авторы книги уже много лет занимаются разработками и расчетом многослойных конструкций. Рекомендации, положившие начало опытно-конструкторским работам, исходили от проф. Отто Юнгблута, сотрудником которого не протяжении многих лет являлся один из авторов книги (Х. Витте). Предлагаемый материал представляет собой обобщение теории расчета и исследовательских работ многих ученых.

Книга предназначена для инженеров-практиков. Поэтому основной упор делается на обстоятельные выводы основных уравнений, наглядные примеры расчетов и схематическое представление о технологии и конструктивных деталях многослойных конструкций. Некоторые проблемы, например ползучесть, колебания и звукоизоляция многослойных панелей, рассматриваются кратко. Выборы изделий многослойных конструкций и способов их производства, изложенные в конструктивном разделе книги, служат в качестве примера и не претендуют на полноту изложения.

Дортмунд, январь 1974 г.

К. Штамм, Х. Витте

Основные обозначения, используемые в тексте

- a — расстояние между осями внешних слоев
- A — жесткость среднего слоя при сдвиге
- b — ширина балки
- B — жесткость при изгибе
- c — показатель жесткости, скорость распространения звука
- c^* — проекция распространения звука на ось x
- d — толщина стенки
- D — жесткость при растяжении, жесткость при кручении
- E — модуль упругости
- $\bar{E}$ — кинетическая энергия
- f — коэффициент надежности, частота, общая функция
- F — площадь
- g — ускорение свободного падения
- G — модуль сдвига
- h — толщина среднего слоя
- H — интеграл Гамильтона
- i — минимальная единица/единство
- J — момент инерции
- j — численная переменная ($j = 1, 2, 3, \dots$)
- k — численная переменная ($k = 1, 2, 3, \dots$), коэффициент теплопередачи
- l — длина балки
- m — изгибающий момент панели, крутящий момент балки, масса
- M — изгибающий момент в балке
- N — продольная сила ($N > 0$; растягивающее усилие), усилие сдвига
- N — продольная сила балки ($N > 0$; растягивающее усилие)
- P — нагрузка на единицу площади, звуковое давление
- p — сила
- q — поперечная нагрузка, сосредоточенная нагрузка, количество тепла на единицу времени
- Q — передающая сила, действующая на балку, количество тепла
- r — радиальные полярные координаты
- R — показатель звукоизоляции
- s — координаты кривой прогиба
- t — толщина внешнего слоя, время
- T — жесткость при кручении, температура, касательный модуль продольного изгиба, сдвигающее усилие
- u — смещение по оси x
- U — потенциальная энергия
- v — смещение по оси y , скорость распространения звука
- V — объем
- $\bar{V}$ — энергия упругости
- w — смещение по оси z
- W — момент сопротивления
- $\bar{W}$ — энергия деформации
- x — декартова координата
- y — декартова координата, общая функция
- z — декартова координата
- Z — акустическое волновое сопротивление
- α — коэффициент теплопередачи
- α_2 — коэффициент температурного расширения
- β — угол сдвига
- δ — растяжение или деформация при сжатии
- γ — безразмерные декартовы координаты, коэффициент потерь звуковой энергии в среднем слое
- φ — угол поворота при кручении, угол движения звука
- λ — коэффициент теплопроводности
- Λ — коэффициент теплопроницаемости
- M — масса балки на единицу длины, масса панели на единицу площади
- ν — коэффициент Пуассона
- ξ — безразмерные декартовы координаты
- Π — потенциальная энергия
- ρ — безразмерные полярные координаты, плотность

σ — нормальные напряжения
 τ — касательные напряжения
 φ — модуль ползучести
 ω — частота колебаний

Буквенные обозначения для расшифровки знаков формул

a — снаружи, связанный (звуковая волна)
 B — разрушение, изгиб, изгибная волна (звук)
 d — сжатие, проницаемость (звуковая волна)
 D — внешний слой, колебание по толщине
 F — давление на поверхность
 i — внутри
 j — индексы нумерации ($j = 1, 2, 3, \dots$)
 k — индексы нумерации ($k = 1, 2, 3, \dots$), изгиб, смятие
 K — средний слой, совмещение
 L — воздух
 m — средний
 M — среднее значение изгибающего момента
 o — верхний слой
 P — предел пропорциональности
 Q — происходит от поперечной силы
 r — отражение звуковой волны
 S — центр тяжести, предел текучести при растяжении, несущая способность многослойной конструкции, сдвиг, волны сдвига (звук)
 T — предельная нагрузка
 u — нижний слой
 V — соединение
 W — стена
 X — ось x
 Y — ось y
 z — ось z
 Z — ось z , растяжение/рестягивающее усилие

1.1. ОБЪЯСНЕНИЕ ПОНЯТИЙ

В последние годы многослойные панели находят все большее применение в строительстве. Благодаря целесообразному выбору и составу отдельных слоев могут быть созданы многослойные панели с отличными статическими и конструктивными свойствами. Идея многослойных конструкций не нова, но все-таки лишь благодаря авиации и полетам в космос, где требовались легкие и высокопрочные материалы, был дан толчок к интенсивному развитию облегченных конструкций. Сегодня принцип многослойных конструкций проник в другие технические области и используется прежде всего в строительстве, при производстве транспортных средств и в хоподипной технике.

Многослойная панель, используемая в качестве несущего элемента, как правило, состоит из трех слоев: двух внешних и одного внутреннего. Для достижения общей несущей способности этой многослойной конструкции слои соединены между собой для образования монолитной системы. В зависимости от формы поперечного сечения, материала и видов опирания существует большое разнообразие комбинационных возможностей (табл. 1.1). Внешние слои могут быть, например, из стали, на основе легких сплавов металлов, дерева, армированной волокном пластмассы, бетона или асбестоцемента, а средний слой — из пробки, резины, древесины бальзы, плотной пластмассы, вспененного полимерного материала, а также из легкого металла в форме сот, перемычек, гофрировки или другой конструкции. Все типы многослойных панелей характеризуются способностью внешних слоев воспринимать усилия растяжения и сжатия и низкими прочностными показателями среднего слоя на сдвиг.

1.2. СВОЙСТВА МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ

Свойства многослойной панели в основном зависят от строения ее слоев. Общими для большинства многослойных панелей (благодаря их легкому среднему слою и жестким в большинстве случаев тонким внешним слоям) являются следующие свойства:

- большая несущая способность при небольшой собственной массе;
- высокая усталостная прочность при переменных нагрузках;
- хорошая звукоизоляция в сравнении с однородными панелями тех же массы и жесткости;

- хорошее звукопоглощение при использовании для среднего слоя материала с высокими поглощающими свойствами;

- хорошая теплоизоляция;

- незначительное накопление тепла в стенах;

- водо- и паронепроницаемость при металлических внешних слоях;

- при защищенных ловахностях внешних слоев устойчивость к погодным воздействиям и агрессивным выделениям промышленных предприятий;

- возможность рационального массового производства;

- быстрый, независимый от времени года монтаж готовых элементов.

1.3.1. Сдвиг среднего слоя. Отдельные слои плоской многослойной панели, например с двумя тонкими внешними слоями из стали и средним слоем из жесткого пенополиуретана, обладают каждый в отдельности небольшой несущей способностью. Обе тонкие обшивки из стали из-за своей незначительной жесткости на изгиб могут едва выдержать собственную массу. Точно так же балка, состоящая только из среднего слоя, из-за низкого модуля упругости жесткого пенополиуретана отличается значительной деформативностью. Но если обшивка и средний слой соединены между собой, то получается многослойная балка с большой несущей способностью. Распределение поперечной нагрузки в подобной балке с равными, тонкими внешними слоями происходит следующим образом: изгибающий момент воспринимают практически одни внешние слои, так как средний слой по сравнению с ними обладает малой жесткостью при растяжении и сжатии, а поперечное усилие, наоборот, принимает на себя средний слой, так как внешние слои из-за своей небольшой толщины не способны воспринимать поперечную нагрузку. Таким образом, усилие сдвига действует на средний слой, который помогает обеспечить несущую способность многослойной панели. С увеличением его прочности на сдвиг возрастает жесткость многослойной панели.

В многослойной балке с профилированными внешними слоями собственная изгибная жесткость последних по сравнению с общей изгибной жесткостью всей конструкции не может быть игнорирована, поэтому поперечная нагрузка распределяется иначе. Одна часть изгибающего момента и поперечного усилия воспринимается непосредственно внешними слоями, другая часть — всей конструкцией: верхним внешним слоем воспринимаются усилия сжатия, нижним — растяжения, а средним — сдвига.

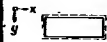
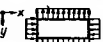
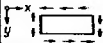
1.3.2. Роль среднего слоя в работе конструкции. Средний слой многослойной панели кроме передачи усилия на внешние слои несет еще одну важную функцию: из-за небольшой толщины внешних слоев при изгибе панели возможно выпучивание сжатого внешнего слоя, но благодаря сцеплению между внешним и средним слоями возникновение этого явления затруднено. Чем жестче средний слой, являющийся для внешних слоев подкрепляющим, упругим слоем, тем меньше выпучивание сжатого внешнего слоя. Тем самым повышается критическое напряжение при выпучивании. Следовательно, несущая способность многослойной панели возрастает с увеличением жесткости среднего слоя.

Если многослойная панель имеет тонкие, профилированные внешние слои, то еще более возрастает ее несущая способность. Например, при применении трапециевидных стальных листов для внешних сжатых слоев ширина зоны вылущивания ограничена продольными ребрами. Поэтому увеличивается уровень критических напряжений.

1.3.3. Требования к соединению слоев. Чтобы средний слой мог полностью выполнять свою основную задачу, а именно воспринимать сдвигающие усилия, а также обеспечивать устойчивость внешних слоев, соединение между ними должно обладать достаточной прочностью. В зависимости от структуры слоев различаются следующие виды соединений: клеевое, непосредственное сцепление после вклеивания среднего слоя,

Таблица 1.1. Различные типы многослойных панелей

Геометрическая характеристика сечения								
средний слой			внешние слои			компоновка		
структура	однородность	толщина	структура	однородность	толщина	расположение внешних слоев относительно оси панели	форма поперечного сечения	количество слоев
Изотропная	Сплошной	Тонкий	Изотропная	Плотные	Тонкие (мембрана)	Симметричное	Постоянная	Три
								
Анизотропная	Полый	Толстый	Анизотропная	Пустотные	Толстые (плита)	Несимметричное	Изменяющаяся	Любое
								

Продольный разрез и вид опирания			Нагрузка		Материал			
многослойная панель			многослойная панель		средний слой		внешние слои	
круглая	прямоуголь- ная	балка	плита	пластина	структура	жесткость (вес)	структура	состав
Шарнирно- оперта по контуру	Шарнирно- оперта по четырем сторонам	Шарнирно- оперта с двух сто- ронам	Односторон- ная	Нормальные силы	Изотропная	Небольшая (легкий)	Изотропная	Одинаковый
								
Закреп- ленная	Частично закрепленная, частично свободная	С односто- ронним закреплением	Двусторонняя	Усилия сдви- га	Анизотроп- ная	Большая (тяжелый)	Анизотроп- ная	Различный
								

сварное соединение, заклепочное, винтовое или шпоночное. По возможности прочность соединения на сдвиг и растяжение должна превышать прочность материала среднего слоя, чтобы предельная нагрузка многослойной панели не определялась качеством соединения.

1.3.4. Причины выхода из строя многослойных панелей. Если многослойная панель разрушается под действием изгибающего усилия, то это может происходить по следующим причинам:

- разрушение одного из внешних слоев вследствие превышения предела прочности;

- разрушение внешнего слоя под действием сжимающих напряжений, превышающих критические;

- разрушение среднего слоя в результате превышения предела прочности его материала на сдвиг;

- разрушение анизотропного структурного среднего слоя в результате превышения предела прочности или потери устойчивости его элементов, например выпучивания стенок сотообразного среднего слоя при слишком большой сдвигающей нагрузке;

- ослабление соединения между внешними и средним слоями;

- сильные местные деформации тонких внешних слоев вследствие припожения сосредоточенных или срезающих нагрузок.

Из-за податливости среднего слоя выпучивание внешнего слоя, на который действуют сжимающие напряжения, оказывается в большинстве случаев причиной выхода панели из строя.

1.3.5. Повышение несущей способности многослойных панелей. Если многослойная панель с плоскими тонкими внешними слоями обладает недостаточной несущей способностью, то повысить ее можно:

- применением профилированных внешних слоев вместо плоских;

- применением внешних слоев, которые в зоне действия усилий сжатия при изгиба многослойной панели имели бы ребра;

- использованием среднего слоя повышенной жесткости для увеличения критических напряжений потери устойчивости;

- применением многослойных элементов, образующих крутые складчатые конструкции;

- применением криволинейных многослойных элементов, образующих цилиндрические или сферические обечайки.

При сферических обечайках, в которых основное значение имеют мембранные напряжения, а напряжения изгиба малы, можно перекрывать площади значительных размеров.

Для увеличения несущей способности можно комбинировать две или несколько из перечисленных возможностей.

1.4. РАСЧЕТ МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ НА ПРОЧНОСТЬ

Расчет многослойной панели на прочность состоит из двух частей: расчета напряжений и деформаций от внешней нагрузки, а также расчета на устойчивость всей системы в целом и на местную устойчивость внешних слоев, на которые действует сжимающее или сдвигающее усилие.

1.4.1. Расчет напряжений и деформаций. Для расчета напряжений и деформаций многослойной панели, на которую действует поперечная нагрузка, имеется много теорий различной точности и сложности. Точный расчет плоской многослойной панели с однородным средним слоем вытекает из математической теории упругости для ортотропного тела.

При небольших деформациях возникают условия равновесия недеформированного и устойчивого на сдвиг элемента (теория первого порядка). Решение уравнений производится отдельно для каждого слоя, при этом должны быть соблюдены условия неразрывности и деформации слоев панели. Точные расчеты весьма трудоемки, и решения до сих пор были известны только для шарнирно-опертых прямоугольных панелей. Упрощение расчета многослойной панели получают за счет того, что предполагают ее несжимаемость в поперечном направлении, а также отсутствие напряжений σ_z по толщине панели. Далее, при легком среднем слое можно пренебречь наличием напряжений в нем, и, наконец, при очень тонких внешних слоях можно предположить в них наличие лишь мембранных напряжений. Переход от ортотропного к условно-изотропному материалу также дает упрощение расчетных соотношений.

1.4.2. Потеря устойчивости. Потеря устойчивости многослойной панели происходит вследствие:

- потери устойчивости при продольном изгибе и выпучивания всей системы под действием сжимающего усилия или усилия сдвига в плоскости панели;

- местной потери устойчивости внешних слоев из-за их небольшой толщины;

- местной потери устойчивости стенок ячеек при конструктивно неоднородном среднем слое.

Для определения критической нагрузки на многослойную панель с однородным средним слоем теоретически можно было бы исходить из математической теории упругости для пространственного, упругого ортотропного тела. При этом все деформации многослойной панели следует рассматривать как достаточно малые, так что они могут быть вырезены линейно. Способ, охватывающий общую теорию как устойчивости многослойной панели, так и устойчивости внешних слоев, является чрезвычайно сложным, так что его можно использовать лишь в исключительных случаях. Вместо этого довольствуются приближенными решениями (отчасти довольно точными) и вычисляют раздельно общую устойчивость и устойчивость внешних слоев.

Расчет общей устойчивости многослойной панели с однородным средним слоем может опираться на упомянутую в п. 1.4.1 упрощенную линейную теорию многослойных конструкций.

Для расчета устойчивости тонких внешних слоев многослойной панели с однородным средним слоем исходят, как сказано в п. 1.3.2, из того, что в общем подетливый средний слой служит для внешних слоев упругим основанием. Сначала определяют коэффициент постели среднего слоя. При этом средний слой достаточной толщины следует рассматривать как упругое ортотропное полупространство, а внешний слой, на который действует сжимающее или сдвигающее напряжение, — как панель на упругом основании и рассчитывать на потерю устойчивости при продольном изгибе. На основе этого расчета может быть определена критическая сила потери устойчивости внешних слоев.

Расчет местной потери устойчивости ячеистых стенок конструктивно неоднородного среднего слоя (например, сотовой структуры) существенно зависит от вида структуры среднего слоя. В большинстве случаев его можно свести к расчету панелей небольших пролетов, на которые действуют напряжения сдвига.

1.4.3. Определение надежности. *Определение прочности внешних слоев.* Следствием действия изгибающего момента на многослойную панель являются нормальные напряжения во внешних слоях, которые в любой точке не должны превышать определенное допустимое значение. Это значение зависит от требуемого коэффициента запаса прочности против разрушения f_1 , при растягивающей нагрузке — от предела прочности при растяжении материала внешнего слоя $\sigma_{xдв}$, а при сжимающем напряжении — от предела прочности материала внешнего слоя на сжатие $\sigma_{адв}$:

$$\text{доп. } \sigma_{xд} = \frac{\sigma_{xдв}}{f_1}; \quad \text{доп. } \sigma_{ад} = \frac{\sigma_{адв}}{f_1}. \quad (1.1)$$

У внешних слоев из материала с выраженной границей текучести, как, например, у стали, вместо предела прочности в выражении (1.1) учитываются напряжения при пределе текучести $\sigma_{ДФ}$ (предел текучести $\sigma_{ДС}$). Следовательно,

$$\text{действ. } \sigma_{xд} \leq \text{доп. } \sigma_{xд}, \quad \text{действ. } \sigma_{ад} \leq \text{доп. } \sigma_{ад}. \quad (1.2)$$

Устойчивость внешних слоев. Если у многослойных конструкций с тонкими внешними слоями в области приложения нагрузки существует опасность их смятия, то имеющееся сжимающее напряжение во внешних слоях не должно превышать определенного допустимого значения напряжения смятия. Это значение зависит от требуемого коэффициента запаса прочности на смятие внешних слоев f_2 , а также от критического напряжения смятия $\sigma_{кд}$:

$$\text{доп. } \sigma_{кд} = \frac{\sigma_{кд}}{f_2}. \quad (1.3)$$

Итак,

$$\text{действ. } \sigma_{ад} \leq \text{доп. } \sigma_{кд}. \quad (1.4)$$

Общая устойчивость многослойной конструкции. Если многослойной конструкции, на которую в ее плоскости действует сжимающее или сдвигающее усилие, угрожает опасность излома или коробления всей системы в целом, то имеющаяся нагрузка не должна превышать определенного допустимого значения. Эта величина зависит от требуемого коэффициента запаса прочности f_3 для общей устойчивости системы, а также от критической нагрузки P_K :

$$\text{доп. } P_K = \frac{P_K}{f_3}. \quad (1.5)$$

Следовательно,

$$\text{действ. } P \leq \text{доп. } P_K. \quad (1.6)$$

Прочность среднего слоя и соединений между слоями. Сдвигающие напряжения в среднем слое не должны ни в какой точке превышать определенного допустимого значения, которое зависит от требуемого коэффициента запаса прочности f_4 к разрушающему сдвигающему напряжению, а также от прочности на сдвиг материала среднего слоя $\tau_{кв}$ или прочности сцепления $\tau_{вс}$ между средним и внешними слоями. Меньшая из этих двух величин учитывается при расчете на прочность:

$$\text{доп } \tau_K = \min \left\{ \tau_{KB} / f_1, \tau_{VB} / f_1 \right\} \quad (1.7)$$

Определение напряжения выйдет следующим образом:

$$\text{действ } \tau_K \leq \text{доп } \tau_K \quad (1.8)$$

В соответствии со сказанным в п. 1.3.3 по возможности $\tau_{VB} \geq \tau_{KB}$ и тем самым критерием для расчета служит предел прочности среднего слоя.

Прочность при действии поперечных нагрузок и продольной силы. Если многослойная панель находится под одновременным воздействием поперечных нагрузок (изгиб) и продольных сжимающих усилий, то сначала необходимо умножить общие поперечную и продольную нагрузки на требуемый коэффициент запаса прочности f_s , а затем при этих повышенных нагрузках определяют напряжения. Полученные таким образом сжимающие напряжения внешних слоев и напряжения сдвига среднего слоя не должны превышать соответствующего предела прочности. Итак,

$$\sigma_{\alpha\beta} \leq \sigma_{\alpha\beta B}, \quad \tau_K \leq \min \left\{ \tau_{KB}, \tau_{VB} \right\} \quad (1.9)$$

С помощью такого вычисления, отличающегося от вычисления при изгибе без продольной нагрузки, учитывается нелинейная зависимость напряжений от продольной нагрузки, и при увеличении нагрузки не фактор f_s действительно гарантируется требуемая прочность против разрушения.

Надежность к местным нагрузкам. Во всех точках приложения нагрузки, опорных зонах, соединениях элементов, передающих усилие между различными элементами многослойной конструкции, не должны возникать местные перегрузки. Например, на опоре, где действует сжимающее напряжение на средний слой, имеющееся давление на поверхность не должно превышать определенного допустимого значения, которое зависит от требуемого коэффициента запаса прочности f_s , а также от прочности на сжатие $\sigma_{\alpha KB}$ среднего слоя:

$$\text{доп } \sigma_F = \frac{\sigma_{\alpha KB}}{f_s} \quad (1.10)$$

Следовательно, определение нагрузки на площадь опоры имеет следующий вид:

$$\text{действ } \sigma_F \leq \text{доп } \sigma_F \quad (1.11)$$

1.5. АКУСТИЧЕСКИЕ, ТЕПЛОИЗОЛЯЦИОННЫЕ И ОГНЕЗАЩИТНЫЕ СВОЙСТВА МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

1.5.1. Акустические свойства. В технической акустике различают два вида шумов: воздушный и ударный (механический). Снижение

уровня воздушного шума строительной панелью осуществляется звукоизоляцией, т.е. отражением воздушного шума, и звукопоглощением, т.е. поглощением звука панелью вследствие превращения звуковой энергии в тепловую.

В случае ударного (механического) шума, когда панель вибрирует непосредственно под механическими воздействиями, речь идет исключительно о звукопоглощении.

Звукоизоляция однородной панели зависит от ее массы и прочности на изгиб; звукоизоляция тем лучше, чем больше масса и меньше прочность на изгиб¹.

В многослойных панелях звукоизоляционный эффект также зависит от массы и прочности на изгиб. Так как многослойные панели в большинстве случаев очень легкие, то не следует ожидать высоких звукоизоляционных показателей. Многослойные панели с тонкими внешними слоями и с легким средним слоем с точки зрения звукоизоляции лучше, чем одинаковые с ними по массе однородные плиты.

Характеристикой степени снижения силы звука является коэффициент звукопоглощения; при применении металлов (например, стали или алюминия) он невелик, а при использовании синтетических материалов (например, сополимерах винилацетата) он большой. В случае многослойных конструкций речь идет только о деформации сдвига среднего слоя (коэффициент потерь ζ_K). Следствием очень маленьких значений ζ_K является небольшое звукопоглощение. Но и при больших значениях ζ_K поглощение ударного шума незначительно, так как средний слой при вибрации настолько устойчив к деформации при сдвиге, что он едва деформируется и поэтому не уничтожает звуковой энергии. Оптимальный коэффициент потерь зависит от конструкции многослойной панели и может быть вычислен для каждого частотного диапазона.

1.5.2. Теплоизоляционные свойства многослойных панелей. Теплоизоляция многослойных панелей с тонкими металлическими внешними слоями и толстым легким средним слоем идентична теплоизоляции последнего, которая в общем достаточно хорошая. Внешние слои предохраняют средний слой от механических повреждений, проникания воды и водяного пара, а в случае жестких вспененных синтетических материалов (например, пенополиуретана), в ячейках которых находятся теплоизолирующие газы, такие, как фтористый хлорметил или углекислый газ, препятствуют выходу этих газов наружу.

1.5.3. Огнезащитные свойства многослойных панелей. Свойства многослойных конструкций с металлическими внешними слоями и средним слоем из пластмассы при высоких температурах зависят в первую очередь от состава среднего слоя. В случае пожара негорючие металлические внешние слои предохраняют средний слой от прямого доступа пламени и препятствуют поступлению кислорода. Поэтому в большинстве случаев имеет место лишь медленное обугливание среднего слоя.

1.6. ПРОИЗВОДСТВО МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ

В книге дано описание производства многослойных панелей с внешними слоями из стали или алюминия и средним слоем из синтетического материала. Процесс производства включает в себя обработку внешних

¹ Действительно только в том случае, пока частота звуковых колебаний значительно не превысит резонансную частоту.

и среднего слоев и их соединение. Два последних процесса при использовании некоторых синтетических материалов могут быть объединены в один технологический процесс. Выбор способа производства зависит от числа многослойных панелей, которое необходимо получить. Особый интерес в отношении многослойных панелей представляют вспенивание среднего слоя из полиуретана и превращение его в жесткий пенопласт. Существуют два способа:

периодический, когда отдельные элементы конструкции изготавливают за несколько отдельных приемов, одним из которых является вспенивание;

непрерывный, когда бесконечная многослойная ленточная конструкция вспенивается на непрерывно работающей установке.

Периодический способ пригоден для производства ограниченного числа многослойных панелей, непрерывный — для производства многослойных конструкций в большом количестве.

1.7. РАЗРАБОТКА МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ, СОЗДАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ НА ИХ ОСНОВЕ И ОБЛАСТИ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Разработка элементов строительных конструкций из многих материалов, таких, как, например, многослойные панели, является оптимизационной задачей, при которой необходимо одновременно учитывать многие аспекты: прочность, звуко- и теплоизоляцию, огнезащиту и конструирование. Особое внимание необходимо уделить технике соединения элементов конструкции, так как в местах соединений должны быть сохранены хорошие свойства многослойной конструкции в целом, должен обеспечиваться простой монтаж, а стоимость шва, которая в значительной степени влияет на общую стоимость конструкции, должна оставаться приемлемой. Многослойные панели с гладкими внешними слоями в конструктивном инженерном строительстве применяют прежде всего в качестве полносборных строительных стеновых элементов (наружные стены и перегородки для внутренних помещений), а также в качестве конструктивных элементов для складчатых и сводчатых систем несущих конструкций покрытий. Многослойные панели с профилированными внешними слоями, у которых жесткость конструкции панели суммируется с жесткостью профилированного внешнего слоя, могут применяться для стен, крыши и потолка с повышенными требованиями к несущей способности (например, при большом пролете).

1.8. ПЛАН ПОСЛЕДУЮЩИХ ГЛАВ

Расчетам прочности многослойных панелей посвящены гл. 2 — 8. В частности, разрабатывается техническая теория:

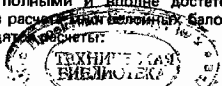
изгиба многослойных балок и плит;

кручения многослойных балок;

устойчивости многослойных балок и панелей.

Технические теории многослойных конструкций с учетом отмеченных выше допущений почти во всех случаях конструктивного инженерного строительства оказываются полными и вполне достаточными.

На основе некоторых примеров расчета балок на изгиб, кручение и устойчивость приводятся расчеты.



температурных деформаций и температурных напряжений;
частоты собственных колебаний;

влияния ползучести среднего слоя на деформации и напряжения под действием длительных нагрузок.

Исследуются также многослойные балки и панели с конструктивно неоднородным средним слоем. Их расчет с помощью эквивалентной прочности при сдвиге сводится к подобному же расчету в случае многослойных конструкций с однородным средним слоем. Основное внимание уделяется многослойным панелям с тонкими внешними слоями, многослойным балкам; расчетам на изгиб и устойчивость внешних слоев, общую устойчивость, колебания, температурные деформации и процессы ползучести.

Чтобы проверить степень соответствия теории расчета с практикой применения многослойных строительных элементов, требуется проведение опытов. В гл. 9 дан краткий обзор того, как целесообразнее построить программу испытаний; затем сообщаются некоторые результаты специальной программы испытаний.

Так как многослойные строительные элементы являются интегрированными системами, обладающими не только несущими, но также звуко- и теплоизоляционными характеристиками, то в гл. 10 излагаются известные теории технической акустики и теплоизоляции специально для многослойных панелей.

До сих пор в инженерном деле проектирование и производство часто рассматривались как две отдельные дисциплины. Рациональное развитие оптимальных многослойных строительных элементов возможно лишь при тесном взаимодействии между конструкторами и технологами; кроме того, в технологии переплетаются еще отрасли обработки материалов и химической технологии. После описания в гл. 11 технологии производства в гл. 12 представлено практическое применение всех приобретенных в предыдущих главах сведений относительно проектирования и разработки многослойных строительных элементов и конструкций.

2. ИЗГИБ МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОК С ПЛОСКИМИ ТОНКИМИ ВНЕШНИМИ СЛОЯМИ

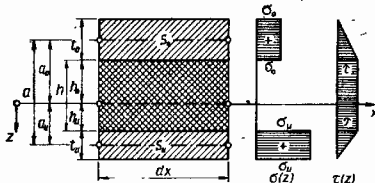
2.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

2.1.1. Предпосылки. В данной главе приведены расчеты прогибов, сдвигающих усилий и напряжений работающих на изгиб многослойных балок с плоскими тонкими внешними слоями, а также даны следующие предпосылки для этих расчетов.

1. Свойства материалов. Материал внешних слоев является линейно упругим, следовательно, в данном случае действует закон Гука. Средний слой однородный, его материал также подчиняется закону Гука. Многослойные панели с конструктивно неоднородными средними слоями будут рассмотрены позднее, их расчет может быть легко сведен к расчету многослойных панелей с однородным средним слоем.

2. Расположение и качество внешних слоев. Внешние слои многослойной панели плоские, параллельные один другому и такие тонкие, что их собственной жесткостью на изгиб можно пренебречь. Поэтому в них принимается мембранное напряженное состояние (рис. 1). Из условия

Рис. 1. Недеформированная многослойная балка и распределение напряжений в случае тонких внешних слоев



равновесия сил в направлении оси x следует

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xxz}}{\partial z} = 0.$$

Так как $\partial \sigma_{xz} / \partial x$ относительно z является величиной постоянной, то напряжения сдвига $\tau_{xxz} = \tau_{zxz}$ во внешних слоях линейно возрастают от 0 к наружной поверхности внешних слоев соответственно на величину $\tau_{xxK} = \tau_{zxK}$ (см. рис. 1). Деформации сдвига внешних слоев γ_{xxz} вследствие этих сдвигающих напряжений τ_{xxz} остаются неучтенными из-за их, по сравнению со средним слоем, большой прочности на сдвиг и небольшой толщины.

3. *Качество среднего слоя.* Модуль упругости среднего слоя E_K настолько мал по сравнению с модулем внешних слоев, что нормальными напряжениями σ_{xK} в среднем слое можно пренебречь по сравнению с нормальными напряжениями σ_{xz} во внешних слоях. Поэтому из условий равновесия сил по оси x среднего слоя

$$\frac{\partial \sigma_{xK}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xxK}}{\partial z} = 0$$

при $\sigma_{xK} = 0$ следует, что напряжение сдвига $\tau_{xxK} = \tau_{zxK}$ в среднем слое является условно-постоянным по всей высоте среднего слоя (см. рис. 1). Угол сдвига γ_{xxK} среднего слоя вследствие распределения τ_{xxK} является поэтому постоянным также по всей высоте среднего слоя (см. рис. 2).

С другой стороны, жесткость среднего слоя должна быть достаточно велика, чтобы воспрепятствовать смятию многослойной панели. Поэтому предполагается несжимаемость многослойной панели по оси z ; толщина среднего слоя и все зависящие от нее значения поперечного сечения вводятся в расчет в качестве постоянных, независимых от нагрузки величин.

4. *Опираие и распределение нагрузки многослойной балки.* Опираие многослойной балки и распределение нагрузок осуществляют таким образом, что она может быть рассчитана как одномерная несущая конструкция, т.е. как балка. Все статические величины, таким образом, зависят только от одной координаты; а именно от линейной координаты x .

5. *Нагрузка многослойной балки.* Нагрузка многослойной балки складывается из поперечной нагрузки и продольной силы. Все сосредоточенные и сдвигающие усилия следует передавать на многослойные балки через достаточно большие и жесткие площадки таким образом, чтобы не происходило больших местных деформаций соответствующего внешнего слоя или всей многослойной балки.

В данной главе рассматриваются многослойные балки лишь с тонкими внешними слоями. Искаженное изображение слоев балки на рис. 1 и 2 было выбрано для наглядности, чтобы лучше представить, например, характер напряжений в зоне внешних слоев (см. рис. 1), а также различия между τ_2 и τ_{2K} или τ и τ_K (см. рис. 2). Поэтому рис. 2 можно также использовать для всех выводов гл. 3 ("Многослойные балки с толстыми внешними слоями").

Деформации. Общий угол сдвига среднего слоя составляет (рис. 2)

$$\tau_K = \tau_1 + \tau_{2K}. \quad (2.1)$$

Для единичного угла сдвига τ_1 среднего слоя справедливо выражение

$$\tau_1 = \frac{dw}{dx} = w'. \quad (2.2)$$

В последующем расчете целесообразно вместо единичного угла сдвига τ_{2K} и полного угла сдвига среднего слоя τ_K ввести угол сдвига τ_2 и τ , относящийся к оси центра тяжести внешнего слоя:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = w' - \tau_2. \quad (2.3)$$

Между обоими видами угла сдвига существует зависимость

$$\Delta U = a\tau = h\tau_K,$$

откуда

$$\tau = \frac{h}{a}\tau_K, \quad \tau_K = \frac{a}{h}\tau. \quad (2.4)$$

Принимая во внимание уравнения (2.3) и (2.1), получаем:

$$\tau_2 = \frac{h}{a}\tau_K - w'; \quad \tau_{2K} = \frac{a}{h}\tau - w'. \quad (2.5)$$

Растяжения нижнего и верхнего внешних слоев составляют:

$$\varepsilon_u = \frac{du_u}{dx}; \quad \varepsilon_o = \frac{du_o}{dx}. \quad (2.6)$$

Если на основе предпосылки малой толщины внешних слоев допустить, что продольные смещения u_u и u_o точек внутри поперечного сечения внешнего слоя настолько мало отличаются одно от другого, что они могут быть заменены значениями u_u и u_o соответствующего центра тяжести внешнего слоя, тогда на основании рис. 2:

$$\left. \begin{aligned} u_u &\approx u_U = \bar{u} + a_u \tau_2; \\ u_o &\approx u_O = \bar{u} - a_o \tau_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

где $\bar{u}$ — продольное смещение многослойного элемента (точка K). Подстановка уравнения (2.7) в (2.6) дает следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_u &\approx \varepsilon_U = \bar{u}' + a_u \tau_2'; \\ \varepsilon_o &\approx \varepsilon_O = \bar{u}' - a_o \tau_2'. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Физические законы (связь деформаций и напряжений). Закон Гука для деформаций среднего слоя при сдвиге выглядит следующим образом:

$$\tau = G \gamma_K \quad (2.2)$$

Если вместо γ_K , согласно уравнению (2.4), ввести угол сдвига γ , то из уравнения (2.9) следует, что

$$\tau = \frac{G}{h} \gamma. \quad (2.10)$$

Закон Гука для растяжения внешних слоев, состоящих из материала с модулем упругости E_u и E_o , имеет вид:

$$\sigma_u = E_u \varepsilon_u; \quad \sigma_o = E_o \varepsilon_o. \quad (2.11)$$

Сдвигающие усилия. Сдвигающее усилие в многослойной балке складывается из усилий, вызванных действием изгибающего момента, и двух срезающих усилий от действия продольной и поперечной сил. Различают два возможных направления сдвигающих усилий: или параллельно осям x и z (продольная сила N_x и поперечная Q_x), или параллельно ребрам деформированного и сдвинутого многослойного элемента (продольная сила N и поперечная Q). Знак продольной силы устанавливается таким образом, что она в качестве растягивающего усилия является положительной. Зависимость между обоими видами сдвигающих усилий видна из рис. 3. Учитывая, что γ_1 и γ_2 являются малыми углами, имеем:

$$N_x = N + Q \gamma_2; \quad Q_x = Q + N \gamma_1. \quad (2.12)$$

Если учесть, что в общем $|N| \gg Q$, величиной $Q \gamma_2$ можно пренебречь по отношению к N , после чего получим:

$$N_x = N; \quad Q_x = Q + N \gamma_1. \quad (2.13)$$

Когда $N=0$, то $Q_x=Q$.

Равнодействующие напряжений поперечного сечения балки. Равнодействующие усилия определяются суммированием напряжений, действующих по элементарной площадке сечения (см. рис. 1):

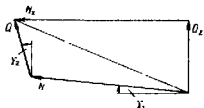
$$\left. \begin{aligned} N &= \int_{(F)} \sigma_x dF = b(t_u \sigma_u + t_o \sigma_o); \\ M &= \int_{(F)} \sigma_z dF = b(t_u a_u \sigma_u - t_o a_o \sigma_o); \\ Q &= \int_{(F)} \tau dF = b a \tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Отношения "сдвигающее усилие — перемещение". Подставляя выражение (2.8) в (2.11), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &\approx \sigma_u = E_u (\bar{u}' + a_u \gamma_2'); \\ \sigma_o &\approx \sigma_o = E_o (\bar{u}' - a_o \gamma_2'). \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

*В противном случае при расчете не следует пользоваться теорией второго порядка, т.е. продольная сила при расчете изгиба может не учитываться.

Рис. 3. Зависимость между сдвигающими усилиями



Уравнения (2.10) и (2.15) подставляем теперь в (2.14); если при этом ввести жесткость внешних слоев при деформации

$$\begin{aligned} D_u &= E_u b t_u = E_u F_u, \quad D_o = E_o b t_o = E_o F_o, \\ D &= D_u + D_o, \end{aligned} \quad (2.16)$$

прочность среднего слоя на сдвиг

$$A = G \frac{b a^2}{h}, \quad (2.17)$$

а также жесткость многослойной конструкции на изгиб, отнесенную к выбранной относительной оси,

$$B_s = D_u a_u^2 + D_o a_o^2, \quad (2.18)$$

тогда для сдвигающих усилий получим выражения:

$$\left. \begin{aligned} N &= (D_u a_u - D_o a_o) \gamma_2' + D \bar{u}' ; \\ M &= (D_u a_u - D_o a_o) \bar{u}' + B_s \gamma_2' ; \\ Q &= A \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Если относительную ось выбрать таким образом, чтобы указанные отношения были более простыми, тогда выражение в скобках следует приравнять к нулю. Из обоих уравнений $D_u a_u - D_o a_o = 0$, $a_u + a_o = a$ легко получить:

$$a_u = \frac{D_o}{D} a; \quad a_o = \frac{D_u}{D} a. \quad (2.20)$$

Это как раз и есть расстояния от отдельных осей центра тяжести внешних слоев до центра тяжести сечения панели. Поэтому в качестве относительной оси многослойной балки выбирается центр тяжести ее сечения. Согласно выражению (2.18), жесткость многослойной балки на изгиб с учетом выражений (2.20) выглядит следующим образом:

$$B_s = \frac{D_u D_o}{D} a^2. \quad (2.21)$$

С учетом выражений (2.20) и (2.3) отношения (2.19) упрощаются и принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} N &= D \bar{u}' ; \\ M &= B_s \gamma_2' = B_s (\gamma' - w''); \\ Q &= A \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Второе и третье выражения уравнений (2.22) соответствуют деформации многослойной балки при изгибе и сдвиге, в то время как первое уравнение соответствует чистому осевому растяжению или деформации при сжатии.

Условия равновесия элемента балки. Условия равновесия $\sum M_y = 0$ и $\sum P_x = 0$ деформированного элемента балки создают следующие отношения (см. рис. 2):

а) принимая за основу сдвигающие усилия M , N_x и Q_x :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM}{dx} - Q_x + N_x w' &= 0; \\ \frac{dQ_x}{dx} + q &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

б) принимая за основу сдвигающие усилия M , N и Q :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM}{dx} - Q &= 0; \\ \frac{dQ}{dx} + q + Nw'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Член Nw'' второго уравнения (2.24) является следствием того, что продольная сила N тангенциально направлена к оси центра тяжести многослойной балки под углом $d\gamma$. Таким образом, возникает поворотное усилие $N d\gamma$, или, поскольку $d\gamma = w'' dx$, будем иметь $Nw'' dx$, которое добавляется к поперечной нагрузке $q dx$.

Дифференциальные уравнения для w и γ . Если второе и третье выражения уравнения (2.22) подставить в условия равновесия (2.24), то, предполагая постоянные (т.е. независимые от x) значения поперечного сечения B_s и A , получим:

$$B_s(\gamma'' - w''') - A\gamma' = 0; \quad A\gamma' + Nw'' = -q. \quad (2.25)$$

Расчленив эти два дифференциальных уравнения и предполагая, что продольная сила N также постоянна, получим

$$\left(1 + \frac{N}{A}\right) w'' - \frac{N}{B_s} w' = + \frac{q}{B_s} - \frac{q'}{A},$$

$$\left(1 + \frac{N}{A}\right) \gamma'' - \frac{N}{B_s} \gamma' = - \frac{q'}{A}. \quad (2.26)$$

Это и есть искомые дифференциальные уравнения для w и γ при расчете по теории второго порядка. Их решения возможны, конечно, и с помощью дифференциальных уравнений (2.25), откуда в решениях для w и γ обоих дифференциальных уравнений (2.26) получаются известные зависимости между постоянными интегрирования.

Отсутствие нагрузки, вызываемой продольным усилием. Если в многослойной балке отсутствует продольная сила ($N = 0$, теория первого порядка), то на основании уравнений (2.25) и (2.26) получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$w'' = + \frac{q}{B_s} - \frac{q'}{A}; \quad \gamma' = - \frac{q}{A}. \quad (2.27)$$

Вместо уравнения (2.27), как это следует из интегрирования или явствует из уравнения (2.22), можно также записать, что

$$\omega'' = -\frac{M}{B_s} + \frac{Q'}{A}, \quad \gamma' = +\frac{Q}{A}. \quad (2.28)$$

Отношения (2.28) подходят для расчета ω и γ только при статически определимых многослойных балках, так как только в этом случае M и Q известны заранее: они следуют из условий равновесия балки, и расчет их прост. При статически неопределимых многослойных балках для расчета M и Q кроме условий равновесия требуются еще и граничные условия деформации, но деформации ω и γ заранее неизвестны. Поэтому в этом случае необходимо снова воспользоваться отношениями (2.27).

2.1.3. Метод раздельных прогибов. Деформация многослойной балки вместо величин ω (общий прогиб) и γ (угол сдвига) может еще характеризоваться и двумя другими величинами перемещения, а именно величинами ω_M и ω_Q , которые определяются через отношения

$$\omega_M' = -\gamma_2, \quad \omega_Q' = \gamma. \quad (2.29)$$

Подстановка уравнений (2.29) и (2.2) в (2.3) после интегрирования¹ дает

$$\omega = \omega_M + \omega_Q. \quad (2.30)$$

Итак, с помощью уравнения (2.30) общий прогиб ω разделяется на две составные части ω_M и ω_Q ; они называются раздельными прогибами. Их связь со сдвигающими усилиями многослойной балки выражается путем подстановки уравнений (2.29) в (2.22), а именно:

$$M = -B_s \omega_M'', \quad Q = A \omega_Q'. \quad (2.31)$$

Из уравнения (2.31) видно происхождение и физическое значение раздельных прогибов: ω_M возникает вследствие изгибающего момента M и деформируемости многослойной панели при изгибе (жесткость на изгиб B_s), а ω_Q от поперечной силы Q и деформируемости многослойной панели при сдвиге (прочность на сдвиг A); поэтому ω_M обозначается как часть изгибающего момента или как часть изгиба, а ω_Q — как часть поперечной силы или как часть сдвига общего прогиба ω .

Дифференциальные уравнения, определяющие расчет раздельных прогибов, получаются или подстановкой уравнений (2.30) и (2.31) в условия равновесия (2.24), или подстановкой уравнений (2.29) и (2.30) в дифференциальные уравнения (2.25). Предполагая постоян-

¹ Возникающая при этом постоянная интегрирования должна быть включена в выражение $\omega_M + \omega_Q$.

ные значения поперечного сечения B_s и A , получим:

$$\left. \begin{aligned} B_s w_N'' + A w_a' &= 0; \\ (A+N) w_a'' + N w_N'' &= -q. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Расчленив эти два дифференциальных уравнения при условии, что продольная сила N является постоянной, получим:

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{N}{A}\right) w_N'' - \frac{N}{B_s} w_a'' &= + \frac{q}{B_s}; \\ \left(1 + \frac{N}{A}\right) w_a'' - \frac{N}{B_s} w_N'' &= - \frac{q}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Решения обоих расчлененных дифференциальных уравнений (2.33) для w_N и w_a согласуются с нерасчлененными дифференциальными уравнениями (2.32), откуда определяются известные зависимости между постоянными интегрирования в решениях дифференциальных уравнений (2.33) для w_N и w_a .

О с о б ы й с л у ч а й. Если $N = 0$, уравнения (2.33) имеют вид:

$$w_N'' = + \frac{q}{B_s}; \quad w_a'' = - \frac{q}{A}. \quad (2.34)$$

Вместо уравнения (2.34), как следует из интегрирования или уравнений (2.31), можно также записать, что

$$w_N'' = - \frac{M}{B_s}, \quad w_a'' = + \frac{Q}{A}. \quad (2.35)$$

Когда и какие из отношений (2.34) или (2.35) являются постоянными, сказано в конце п. 2.1.2.

2.1.4. Граничные и промежуточные условия. Граничные условия при интегрировании дифференциальных уравнений (2.26) для w и (2.33) для w_N и w_a в их решениях получают произвольные постоянные интегрирования; их определение производится исходя из условий опирания на опорах многослойной балки (граничные условия). Подбор наиболее важных видов опирания балки вместе с относящимися сюда уравнениями условий опирания приводится в табл. 2.1 для многослойных балок с плоскими тонкими внешними слоями. Рисунки различных видов опирания, представленные в первой графе таблицы, являются лишь схематическими изображениями. Например, в случае шарнирного опирания опорная реакция A не должна действовать на многослойную балку просто как сосредоточенное усилие, а должна передаваться через подкладку шириной $s = A/bc$ (рис. 4). При этом напряжения в опорной части не должны превышать допускаемую прочность среднего слоя на сжатие. При жестком закреплении балки момент защемления M посредством соответствующего крепления краев многослойной балки

Таблица 2.1. Граничные условия многослойных балок с плоскими тонкими внешними слоями

№ п.п.	Эскиз	Вид опирания	Граничные условия, выраженные		
			смещениями и срезающими нагрузками	через w и γ	через парциальные провесы w_N и w_Q
	I	II	III	IV	V
1		Шарнирная опора	$w = 0$ $M = 0$	$w = 0$ $\gamma' - w'' = 0$	$w_N + w_Q = 0$ $w_N' = 0$
2		Жесткое закрепление	$w = 0$ $\gamma_2 = 0$	$w' = 0$ $\gamma - w' = 0$	$w_N + w_Q = 0$ $w_N' = 0$
3		Свободный конец балки	$M = 0$ $Q = 0$	$\gamma' - w'' = 0$ $\gamma = 0$	$w_N' = 0$ $w_Q = 0$
4		Вертикально введенное закрепление	$\gamma_2 = 0$ $Q = 0$	$w' = 0$ $\gamma = 0$	$w_N' = 0$ $w_Q = 0$
5		Упругошарнирная опора	$w = Q/c$ $M = 0$	$w = A\gamma/c$ $\gamma' - w'' = 0$	$w_N + w_Q = Aw_Q/c$ $w_N' = 0$
6		Поворотное-упругое закрепление	$w = 0$ $\gamma_2 = M/c$	$w = 0$ $\gamma - w' = B_2(\gamma' - w'')/c$	$w_N + w_Q = 0$ $w_N' = B_2 w_N''/c$

должен быть передан в виде пары нормальной силы $P_X = M/a$ непосредственно на оба внешних слоя. Согласно принципу Сан-Венана, опорные реакции, имеющие влияние в зоне передачи нагрузки, на некотором расстоянии от опоры не оказывают больше воздействия на статические величины (сдвигающие усилия и деформации), в этом случае значение имеет лишь статически эквивалентная система сил. Уравнения граничных условий, представленные в графах IV и V табл. 2.1 и выраженные через w и γ или w_N и w_Q , получаются из уравнений графы III с помощью отношений (2.3) и (2.22) или (2.29)–(2.31).

На каждом конце многослойной балки с плоскими тонкими внешними слоями необходимо выполнить два граничных условия, а всего, следовательно, четыре. Число уравнений совпадает с порядком дифференциального уравнения (2.26) для w или (2.33) для w_N , так что все постоянные интегрирования могут быть определены с помощью граничных условий. Правда, при независимом одно от другого интегрировании обоих дифференциальных уравнений (2.26) и (2.33) в выражениях для w

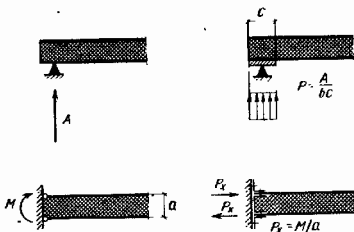


Рис. 4. Передача нагрузки на опору

и γ или w_M и w_Q получают сначала более четырех постоянных интегрирования. Принимая во внимание первое уравнение (2.25) и (2.32), известные зависимости между постоянными интегрирования могут быть определены путем подстановки, так что в конце концов для уравнений граничных условий остается четыре неизвестных постоянных (более подробно см. п. 2.2.4).

Если в случае статически определимой многослойной балки без продольного усилия исходить из отношений (2.28) или (2.35) вместо (2.27) или (2.34), то следует учесть только два граничных условия вместо четырех. Так как при интегрировании уравнений (2.27) и (2.34) для $N = 0$ уже были удовлетворены оба граничных условия, то остались только два условия деформации.

Промежуточные условия. Между опорами многослойной балки могут быть заданы определенные условия относительно возможностей ее перемещения (промежуточные условия) такого порядка, что:

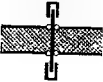
создаются определенные ограничения возможностей перемещения многослойной балки вследствие установки каких-либо ограничений (например, промежуточных опор или вертикально введенных промежуточных закреплений);

имеются дополнительные возможности перемещения многослойной балки вследствие исключения внутренних ограничений (например, введения шарниров в зоне действия изгибающего момента или шарниров в зоне действия поперечных сил).

В каждой такой точке возникает сначала неизвестная величина скачка усилия¹; с другой стороны, для этой точки может быть составлено уравнение, выражающее заданные условия. Таким образом, в распоряжении всегда имеется такое же число уравнений, выражающих промежуточные условия, как и неизвестных величин скачков усилий. Подбор наиболее важных промежуточных условий вместе с описывающими их уравнениями условий для многослойных балок с плоскими тонкими внешними слоями приводится в табл. 2.2.

¹ Величина скачка есть сдвигающее усилие или величине деформации справа рядом с точкой промежуточных условий минус сдвигающее усилие или величина деформации слева рядом с точкой промежуточных условий, например $\Delta Q = Q_r - Q_l$ или $\Delta w = w_r - w_l$.

Таблица 2.2. Промежуточные условия многослойных балок с прямыми тонкими внешними слоями

1	2	3	4	5	6
Эскиз	Вид опоры	Величина скачка	Уравнения, выражающие промежуточные условия		
			посредством смещений и поперечных сил	через w и $\mathcal{T}$	через раздельные прогибы w_M и w_A
	Неподвижная промежуточная опора	Скачок поперечной силы $\Delta Q = Q_r - Q_l$ (опорная реакция)	$w = 0$	$w = 0$	$w_M + w_A = 0$
	Вертикально введенное промежуточное закрепление	Скачок изгибающего момента $\Delta M = M_r - M_l$ (момент защемления)	$\mathcal{T}_2 = 0$	$\mathcal{T} - w' = 0$	$w_M' = 0$
	Шарнир изгибающего момента	Угловой скачок $\Delta \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_{2r} - \mathcal{T}_{2l}$	$M = 0$	$\mathcal{T}^2 - w'' = 0$	$w_M'' = 0$
	Шарнир поперечного усилия	Скачок смещения $\Delta w = w_r - w_l$	$Q = 0$	$\mathcal{T} = 0$	$w_A = 0$
	Упругая промежуточная опора	Скачок поперечной силы $\Delta Q = Q_r - Q_l$ (опорная реакция)	$w = \frac{\Delta Q}{c}$	$w = \frac{\Delta Q}{c}$	$w_M + w_A = \frac{\Delta Q}{c}$
	Поворотнo-упругое промежуточное закрепление	Скачок изгибающего момента $\Delta M = M_r - M_l$ (момент защемления)	$\mathcal{T}_2 = \frac{\Delta M}{C}$	$\mathcal{T} - w' = \frac{\Delta M}{C}$	$w_M' = \frac{\Delta M}{C}$

2.1.5. Напряжения внутри многослойной балки. Определив с помощью уравнений (2.26) смещения w и γ , а также w_M и w_Q с помощью уравнений (2.33) с учетом граничных и промежуточных условий, из уравнений (2.22) и (2.31) можно найти изгибающий момент M и поперечное усилие Q многослойной балки. При статически определимых многослойных балках M и Q могут быть вычислены из условий равновесия. С помощью M и Q можно также рассчитать и напряжения. Решение уравнений (2.22) относительно величин деформаций с последующей подстановкой в уравнения (2.15) и (2.10) дает для нормальных напряжений внешних слоев и напряжений сдвига (касательных напряжений) среднего слоя после краткого расчета с учетом уравнений (2.16), (2.17), (2.20) и (2.21) следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{1}{F_u} \left(\frac{D_u}{D} N + \frac{1}{a} M \right); \\ \sigma_o &= \frac{1}{F_o} \left(\frac{D_o}{D} N - \frac{1}{a} M \right); \\ \tau &= \frac{Q}{ab}. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

При внешних слоях одинаковой толщины ($F_u = F_o = F$) с одинаковым модулем упругости ($E_u = E_o = E$) первые два уравнения (2.36) упрощаются и принимают вид

$$\sigma_{u,o} = \frac{1}{F} \left(\frac{N}{2} \pm \frac{M}{a} \right). \quad (2.37)$$

2.2. ПРИМЕРЫ МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОК, НА КОТОРЫЕ ДЕЙСТВУЮТ ПОПЕРЕЧНЫЕ НАГРУЗКИ

2.2.1. Многослойная консольная балка с односторонним закреплением. Произвольная поперечная нагрузка $q(x)$. В данном случае применяется метод раздельных прогибов. Так как система статически определимая (рис. 5), то здесь можно исходить из соотношений (2.35) для w_M и w_Q . Интегрированием при

$$w_M(0) = C_1, \quad w'_M(0) = C_2, \quad w_Q(0) = D_1$$

получаем:

$$\left. \begin{aligned} w_M(x) &= C_1 + C_2 x - \frac{1}{B_s} \int_{x=0}^x (x-z) M(z) dz; \\ w_Q(x) &= D_1 + \frac{1}{A} M(x). \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

С помощью обоих граничных условий перемещения

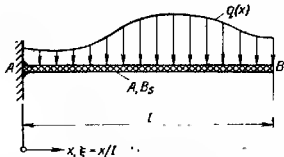
$$w(0) = w_M(0) + w_Q(0) = 0 \quad \text{и} \quad \tau_2(0) = w'_M(0) = 0 \quad (2.39)$$

получаем:

$$C_1 + D_1 = -\frac{M(0)}{A}, \quad C_2 = 0, \quad (2.40)$$

где C_1 и D_1 из-за недостатка других определяющих уравнений могут быть вычислены из уравнений (2.39) не по отдельности, а лишь суммарно. Если произвольная

Рис. 5. Консольная балка под действием поперечной нагрузки



постоянная $C_1 = 0$, то тогда $D_1 = -M(0)/A$, а уравнения (2.38) дают для раздельных прогибов следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} w_M(x) &= -\frac{1}{B_S} \int_{z=0}^x (x-z) M(z) dz ; \\ w_Q(x) &= +\frac{1}{A} [M(x) - M(0)] . \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

Общий прогиб $w(x)$ консольной балки, согласно (2.30), получается сложением раздельных прогибов $w_M(x)$ и $w_Q(x)$.

Исследуем два предельных случая.

Бесконечная жесткость на сдвиг ($A = \infty$). С помощью уравнений (2.41) получаем общий прогиб

$$w[A = \infty] = w_B = w_M, \quad (2.42)$$

где w_B — перемещение балки при чистой деформации изгиба ($A = \infty$) и называется прогибом.

Бесконечная жесткость на изгиб ($B_S = \infty$). С помощью уравнений (2.41) получаем общий прогиб

$$w[B_S = \infty] = w_S = w_Q, \quad (2.43)$$

где w_S — перемещение балки при чистой деформации сдвига и называется прогибом при сдвиге.

Если имеется многослойная консольная балка с конечной жесткостью на сдвиг и изгиб, то для ее общего прогиба вместо уравнений (2.30) с учетом уравнений (2.42) и (2.43) справедливо также уравнение

$$w(x) = w_B(x) + w_S(x). \quad (2.44)$$

Следовательно, общий прогиб w консольной балки можно определить суммированием прогиба w_B и прогиба при сдвиге w_S по отдельности. Но это не всегда так.

В точке закрепления ($x = 0$) для угла касательной линии прогиба с учетом уравнений (2.30), (2.41) и (2.42) получаем

$$\varphi(0) = w'(0) = w'_M(0) + w'_Q(0) = \frac{Q(0)}{A}.$$

$\varphi(0) = 0$, что привычно для обычной теории изгиба балок в точках закрепления, в случае прогиба при сдвиге w_S должна быть учтена дополнительная деформация.

Равномерно распределенная нагрузка q_0 . Введя безразмерную координату длины $\xi = x/l$, получим величину момента в многослойной консольной балке:

$$M = - \frac{q_0 l^2}{2} (1 - \xi)^2. \quad (2.45)$$

После выполнения интегрирования выражений (2.41) получим раздельные прогибы:

$$w_M = \frac{q_0 l^4}{24 B_s} \xi^2 (6 - 4\xi + \xi^2); \quad w_q = \frac{q_0 l^2}{2A} \xi (2 - \xi). \quad (2.46)$$

Полный прогиб получается сложением w_M и w_q . После подстановки

$$\beta = B/A l^2 \quad (2.47)$$

формула для определения полного прогиба выглядит следующим образом:

$$w = \frac{q_0 l^4}{24 B_s} [\xi^2 (6 - 4\xi + \xi^2) + 12\beta \xi (2 - \xi)]. \quad (2.48)$$

Сосредоточенная нагрузка P в пролете панели. В точке $x=e$ ($0 < e < l$) или $\xi = e/l = \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$) многослойной консольной балки прилагается сосредоточенная нагрузка P . Изгибающий момент многослойной балки составляет

$$M_1 = -Pl(\varepsilon - \xi), \quad M_2 = 0, \quad (2.49)$$

где индекс 1 справедлив для $0 \leq \xi \leq \varepsilon$, а индекс 2 — для $\varepsilon \leq \xi \leq 1$. Подстановка уравнений (2.49) в (2.41) и интегрирование по частям первого уравнения (2.41) дает после краткого расчета следующие значения прогибов:

$$\left. \begin{aligned} w_{M1} &= \frac{Pl^3}{6B_s} \xi^2 (3\varepsilon - \xi); & w_{M2} &= \frac{Pl^3}{6B_s} \varepsilon^2 (3\xi - \varepsilon); \\ w_{q1} &= \frac{Pl}{A} \xi; & w_{q2} &= \frac{Pl}{A} \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

Полный прогиб получается путем сложения w_M и w_q с учетом (2.47) и выглядит так:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{Pl^3}{6B_s} \xi (6\beta + 3\varepsilon\xi - \xi^2); \\ w_2 &= \frac{Pl^3}{6B_s} \varepsilon (6\beta - \varepsilon^2 + 3\varepsilon\xi). \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Если в уравнения (2.51) подставить $P = 1$ и ввести обозначения

$$w_1[P=1] = \bar{w}_1 \quad \text{и} \quad w_2[P=1] = \bar{w}_2, \quad (2.52)$$

тогда $\bar{w}_1(\xi, \varepsilon)$ и $\bar{w}_2(\xi, \varepsilon)$ представляют собой линии влияния для прогиба в точке ξ от действия сосредоточенной единичной нагрузки $P = 1$ в точке ε . Уравнения (2.52) могут служить для определе-

ния линии прогиба $w(\xi)$ от любой произвольной распределенной нагрузки $q(\xi)$. При $dP = q(\xi) d\xi$ имеем

$$w(\xi) = \frac{1}{B_s} \int_{\varepsilon=0}^{\xi} \bar{w}_2(\xi, \varepsilon) q(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{B_s} \int_{\varepsilon=\xi}^l \bar{w}_1(\xi, \varepsilon) q(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (2.53)$$

Например, для $q = q_0 = \text{const}$ справедливо

$$\begin{aligned} w(\xi) &= \frac{q_0 l^4}{6 B_s} \left[\int_{\varepsilon=0}^{\xi} \varepsilon (6\beta - \varepsilon^2 + 3\varepsilon \xi) d\varepsilon + \int_{\varepsilon=\xi}^l \xi (6\beta + 3\varepsilon \xi - \xi^2) d\varepsilon \right] = \\ &= \frac{q_0 l^4}{24 B_s} \left[\xi^2 (6 - 4\xi + \xi^2) + 12\beta \xi (2 - \xi) \right]. \end{aligned}$$

Это отношение совпадает с уравнением (2.48).

2.2.2. Многослойная балка, шарнирно-опертая по двум сторонам. Сплошная неравномерно распределенная нагрузка. Здесь применяется метод раздельных прогибов. Так как система статически определима (рис. 6), вновь можно исходить из уравнений (2.35). Интегрированием с сокращениями $w_M(0) = C_1$,

$$\frac{w_M(l) - w_M(0)}{l} = C_2, \quad w_Q(0) = D_1$$

после расчета получим:

$$\left. \begin{aligned} w_M(x) &= C_1 + C_2 x - \frac{1}{B_s} \int_{z=0}^x G(x, z) M(z) dz; \\ w_Q(x) &= D_1 + \frac{1}{A} M(x), \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

где в выражении для w_M

$$G(x, z) = \begin{cases} -z(t-x)/l & \text{для } 0 \leq z \leq x, \\ -x(t-z)/l & \text{для } x \leq z \leq l \end{cases} \quad (2.55)$$

есть функция Грина данной граничной задачи*. С помощью обоих граничных условий

$$\begin{aligned} w(0) &= w_M(0) + w_Q(0) = 0, \\ w(l) &= w_M(l) + w_Q(l) = 0, \end{aligned} \quad (2.56)$$

принимая во внимание, что $M(0) = M(l) = 0$ и

$$\int_0^l G(0, z) M(z) dz = \int_0^l G(l, z) M(z) dz = 0,$$

получим отношения $C_1 + D_1 = 0$, $C_2 = 0$, где C_1 и D_1 из-за недостатка других определяющих уравнений могут быть вычислены из уравнений (2.56) не по отдельности, а лишь суммарно. Если записать, что $w_M(0) = C_1 = 0$, то тогда и $w_Q(0) = D_1 = 0$, а уравнения (2.54) дадут для

* Дифференцированием уравнений (2.54) подтверждается, что дифференциальные уравнения (2.35) выполнены. При подстановке $x = 0$ и $x = l$ в уравнения (2.54) предполагают граничные значения $w_M(0)$ и $w_M(l)$, а также $w_Q(0)$.

раздельных прогибов следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} w_M(x) &= -\frac{1}{B_s} \int_{x=0}^x G(x, z) M(z) dz; \\ w_q(x) &= +\frac{1}{A} M(x). \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

Полный прогиб w балки, шарнирно-опертой по двум сторонам, получается, согласно уравнению (2.30), сложением раздельных прогибов w_M и w_q . Оба предельных случая $A = \infty$ и $B_s = \infty$ дают, как и в п. 2.2.1, отношения (2.42) и (2.43), т.е. при конечной жесткости на сдвиг и изгиб здесь также справедливо уравнение (2.44).

Равномерно распределенная нагрузка q_0 . При $\xi = x/l$ изгибающий момент составляет

$$M = \frac{q_0 l^2}{2} (\xi - \xi^2), \quad (2.58)$$

в результате чего уравнения (2.57) после выполнения интегрирования дают следующие раздельные прогибы:

$$w_M = \frac{q_0 l^4}{24 B_s} \xi (1 - \xi) (1 + \xi - \xi^2); \quad w_q = \frac{q_0 l^2}{2 A} \xi (1 - \xi). \quad (2.59)$$

Полный прогиб получается путем сложения w_M и w_q с учетом (2.47):

$$w = \frac{q_0 l^4}{24 B_s} \xi (1 - \xi) (1 + 12\beta + \xi - \xi^2). \quad (2.60)$$

Сосредоточенная нагрузка P в пролете панели. Если в точке $x = e$ ($0 < e < l$) и $\xi = e/l = \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$) имеет место сосредоточенная нагрузка P , то изгибающий момент составляет:

$$M_1 = Pl(1 - \varepsilon)\xi, \quad M_2 = Pl\varepsilon(1 - \xi), \quad (2.61)$$

где индекс 1 справедлив для $0 \leq \xi \leq \varepsilon$, а индекс 2 — для $\varepsilon \leq \xi \leq 1$.

Подстановка уравнений (2.61) в (2.57) и интегрирование по частям первого уравнения (2.57) после расчета дает следующие уравнения:

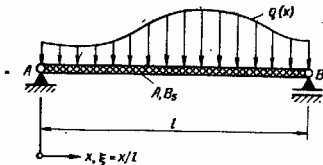
$$\left. \begin{aligned} w_{M1} &= \frac{Pl^3}{6 B_s} (1 - \varepsilon) \xi (2\varepsilon - \varepsilon^2 - \xi^2); \\ w_{M2} &= \frac{Pl^3}{6 B_s} \varepsilon (1 - \xi) (2\xi - \xi^2 - \varepsilon^2); \\ w_{q1} &= \frac{Pl}{A} (1 - \varepsilon) \xi; \quad w_{q2} = \frac{Pl}{A} \varepsilon (1 - \xi). \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

Полный прогиб получается сложением w_M и w_q с учетом (2.47):

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{Pl^3}{6 B_s} (1 - \varepsilon) \xi (6\beta + 2\varepsilon - \varepsilon^2 - \xi^2); \\ w_2 &= \frac{Pl^3}{6 B_s} \varepsilon (1 - \xi) (6\beta - \varepsilon^2 + 2\xi - \xi^2). \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

При $P = 1$ уравнения (2.63) представляют собой линию влияния для прогиба и могут служить для определения линии прогиба $w(\xi)$ от дейст-

Рис. 6. Шарнирно-опертая по двум сторонам балка под действием неравномерно распределенной нагрузки



вия любой произвольной распределенной нагрузки $q(\xi)$ [ср. уравнений (2.52) и (2.53)].

Единичный момент M в пролете. В точках $x = e$ и $\xi = e/l = \epsilon$ ($0 < e < l$ и $0 < \epsilon < 1$) действует единичный момент M . Относительно приложения момента M следует различать два варианта (рис. 7).

Вариант I. M вводится в многослойную балку в качестве пары сил $P_z c_x$, причем c_x очень мала, P_z очень велика, а $P_z c_x = M$; силы P_z действуют поперек балки.

Вариант II. M вводится в многослойную балку в качестве пары сил $P_x c_x$, причем $c_x = a$, в $P_x = M/a$; силы P_x действуют вдоль балки. Многослойная балка жестко закреплена в точке подачи нагрузки.

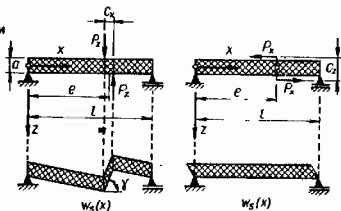
В первом варианте очевидно большие силы P_z должны полностью восприниматься средним слоем как поперечные нагрузки и, действуя на него в точке введения нагрузки, вызывать работу среднего слоя на сдвиг. Так как в данном случае $w_s = w_q$, расчет линии прогиба при сдвиге может производиться с помощью двух последних уравнений (2.62) наложением нагрузок $P = P_z$ в точке $x = e - c_x/2$ и $P = -P_z$ в точке $x = e + c_x/2$ с последующим образованием граничных значений $c_x \rightarrow 0$. $w_s(x)$ для небольшой, но еще конечной c_x показан слева на рис. 7.

При втором варианте обоими внешними слоями в качестве продольных сил воспринимаются значительно меньшие силы $P_x = M/a$. Расчет прогибов многослойной балки здесь не может быть осуществлен с помощью уравнения (2.57), так как оно предполагает нагрузку, распространяющуюся поперек оси балки. Вместо этого снова исходим из общих дифференциальных уравнений (2.35). Сдвигающие усилия составляют:

$$M_1 = M\xi; \quad M_2 = M(-1 + \xi); \quad Q = M/l; \quad (2.64)$$

где индекс 1 действителен для $0 \leq \xi \leq \epsilon$, а индекс 2 — для $\epsilon \leq \xi \leq 1$.

Рис. 7. Нагрузка от момента и прогиб при сдвиге



Подстановка (2.64) в (2.35), интегрирование уравнений и выполнение граничных условий¹ $w_{M1}(0)=0$, $w_Q(0)=0$, $w_{M2}(l)+w_Q(l)=0$, а также переходные условия $w_{M1}(e)=w_{M2}(e)$, $w'_{M1}(e)=w'_{M2}(e)$ после некоторого расчета дают уравнения:

$$\left. \begin{aligned} w_{M1} &= \frac{Ml^2}{6B_s} [\xi(-2+6\varepsilon-3\varepsilon^2-\xi^2)-6\beta\xi]; \\ w_{M2} &= \frac{Ml^2}{6B_s} [(1-\xi)(3\varepsilon^2-2\xi+\xi^2)-6\beta\xi]; \\ w_Q &= \frac{Pl}{A} \xi. \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

Полный прогиб получается сложением w_M и w_Q :

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{Ml^2}{6B_s} \xi(-2+6\varepsilon-3\varepsilon^2-\xi^2), \\ w_2 &= \frac{Ml^2}{6B_s} (1-\xi)(3\varepsilon^2-2\xi+\xi^2). \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

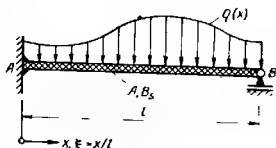
Для обоих предельных случаев $A=\infty$ и $B_s=\infty$ из уравнений (2.66) следует, что $w_Q=w$, $w_s=0$. Прогиб при сдвиге w_s в данном случае равен нулю. Следовательно, деформации при сдвиге в случае $B_s=\infty$ состоят только из перекоса всех поперечных сечений многослойной конструкции на постоянную величину $\gamma = Q/A = M/A l$ (см. рис. 7, справа).

Примечание. Если опора многослойной балки закреплена (см. пп. 2.2.1, 2.2.3, 2.2.4), то защемление при втором варианте приложения нагрузки следует формировать с укреплением опорной части. При формировании защемления, согласно первому варианту приложения нагрузки, в опорной части возникают значительные напряжения сдвига и деформации. Тем самым значительно снижаются величина опорного момента, т.е. действие защемления опоры уменьшается (см. п. 2.2.5, предельный случай $\varepsilon=0$ и рис. 11), а также несущая способность многослойной балки из-за больших местных напряжений сдвига в среднем слое. При защемлении по второму варианту таких проблем не возникает.

2.2.3. Многослойная балка, жестко закрепленная с одной стороны и шарнирно-опертая с другой. Неравномерно распределенная нагрузка $q(x)$. Здесь снова используется метод отдельных прогибов. Так как система статически неопределима (рис. 8), то нельзя (как это имело место в пп. 2.2.1 и 2.2.2) исходить из уравнений (2.35), так как $M(x)$ и $Q(x)$ заранее неизвестны. Вместо этого применяется метод, основывающийся на принципе сложения нагрузок. Статически определимая основная система создается тем, что опору, например, располагают в точке B , при этом возникает односторонне закрепленная консольная балка, которая уже рассматривалась в п. 2.2.1. В качестве замены опоры в точке B устанавливается единичное сосредоточенное усилие X , направленное снизу вверх (статически неизвестное). Его величина рассчитывается таким об-

¹ Как и раньше, произвольно требуется раздельное обращение в нуль $w_{M1}(0)$ и $w_Q(0)$. (вместо их суммы), так как иначе для пяти постоянных интегрирования имелось бы лишь четыре уравнения.

Рис. 8. Многослойная балка, жестко закрепленная с одной стороны и шарнирно-опертая с другой, под действием поперечной нагрузки



разом; что полный прогиб от $q(x)$ и X в точке B равен нулю, точно так же, как если бы была опора. Зная X , согласно принципу сложения нагрузок, получают также все другие статические величины данной многослойной балки (прогибы, сдвигающие усилия и т.д.).

Расчет величины X осуществляется с помощью уравнений (2.41) и (2.51). Если отдельные прогибы от $q(x)$, согласно (2.41), обозначить w_{Hq} и w_{Bq} и в уравнения (2.51) подставить $P = -x$, $\varepsilon = 1$ и $\xi = 1$, то для полного прогиба консольной балки в точке B от действия в ней $q(x)$ и X получим

$$w(1) = w_{Hq}(1) + w_{Bq}(1) - \frac{X l^3}{3 B_s} (1 + 3\beta).$$

С учетом (2.47) из условия $w(1) = 0$ следует

$$X = \frac{3 B_s}{l^3} \frac{w_{Hq}(1) + w_{Bq}(1)}{1 + 3\beta}. \quad (2.67)$$

Если в выражение B ввести обозначения

$C_q^{(H)}$ — для произвольной величины статически неопределимой многослойной балки от нагрузки $q(x)$,

$C_q^{(B)}$ — для такой же величины статически определимой консольной балки от $q(x)$,

$C_1^{(B)}$ — для такой же величины консольной балки от $X = 1$, то, согласно принципу сложения, справедливо выражение

$$C_q^{(H)} = C_q^{(B)} + X C_1^{(B)}. \quad (2.68)$$

Итак, с уравнениями (2.67) и (2.68) известны все статические величины данной многослойной балки (раздельные прогибы, сдвигающие усилия и т.д.).

Равномерно распределенная нагрузка q_0 . Из уравнения (2.48) при $\xi = 1$ следует, что

$$w_q(1) = w_{Hq}(1) + w_{Bq}(1) = \frac{1 + 4\beta}{B} \frac{q_0 l^4}{B_s}.$$

Таким образом, уравнение (2.67) непосредственно дает выражение

$$X = \frac{3 q_0 l}{B} \frac{1 + 4\beta}{1 + 3\beta}. \quad (2.69)$$

Следовательно, уравнения для раздельных прогибов, согласно отношениям (2.68) с (2.46), (2.69) и (2.50) (последнее при условии, когда $\varepsilon = 1$, а $P = -1$) после вычислений принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} w_N &= \frac{q_0 l^2}{48 B_s} \xi^2 \left(\frac{3}{1+3\beta} - \frac{5+12\beta}{1+3\beta} + 2\xi^2 \right); \\ w_Q &= \frac{q_0 l^2}{8A} \xi \left(\frac{5+12\beta}{1+3\beta} - 4\xi \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

Полный прогиб получается путем сложения w_N и w_Q с учетом (2.47):

$$w = \frac{q_0 l^2}{48 B_s} \left[\frac{6\beta(5+12\beta)}{1+3\beta} \xi + \frac{3-24\beta(1+3\beta)}{1+3\beta} \xi^2 - \frac{5+12\beta}{1+3\beta} \xi^3 + 2\xi^4 \right]. \quad (2.71)$$

Сдвигающие нагрузки получаются из уравнений (2.70) и (2.31):

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{q_0 l^2}{8} \left(-\frac{1}{1+3\beta} + \frac{5+12\beta}{1+3\beta} \xi - 4\xi^2 \right); \\ Q &= \frac{q_0 l}{8} \left(\frac{5+12\beta}{1+3\beta} - 8\xi \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

При более детальном рассмотрении уравнений (2.70) и (2.71) можно заметить следующее:

прогиб w_N как часть полного прогиба зависит не только от изгибной жесткости B_s , но и от β , а тем самым и от прочности многослойной балки на сдвиг A ;

прогиб как часть полного прогиба зависит не только от прочности на сдвиг A , но и от β , а тем самым и от изгибной жесткости B_s многослойной балки;

для изгибающего момента M и поперечной силы Q характерно то же, что и для w_N и w_Q ;

для левой опоры справедливы отношения $w_N(0)=0$, $w_Q(0)=0$, т.е. отдельные прогибы выполняют граничное условие $w_N(0)+w_Q(0)=0$ не только в их сумме, но и в отдельности. Напротив, для правой опоры справедливо:

$$\left. \begin{aligned} w_N(l) &= -\frac{1}{1+3\beta} \frac{q_0 l^2}{8A}; \\ w_Q(l) &= +\frac{1}{1+3\beta} \frac{q_0 l^2}{8A}, \end{aligned} \right\}$$

т.е. отдельные прогибы выполняют граничное условие $w_N(l)+w_Q(l)=0$ только в их сумме.

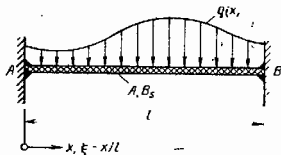
Оба граничных случая $A=\infty$ и $B_s=\infty$, т.е. $\beta=0$ и $\beta=\infty$, с такими же обозначениями, как и в (2.42) и (2.43), дают:

$$w_D = \frac{q_0 l^4}{48 B_s} \xi^2 (3-5\xi+2\xi^2); \quad w_S = \frac{q_0 l^2}{2A} \xi (1-\xi);$$

следовательно, $w_B \neq w_N$, $w_S \neq w_Q$, а также $w_B + w_S \neq w = w_N + w_Q$.

Во всех перечисленных пунктах многослойная балка, на которую действует поперечная нагрузка, отличается от описанных в пп. 2.2.1 и 2.2.2

Рис. 9. Многослойная балка с жестким двухсторонним закреплением под действием поперечной нагрузки



многослойных балок, на которые также действует поперечная нагрузка, так как она в противоположность последним статически неопределима. Следовательно, раздельное вычисление прогиба w_B и прогиба при сдвиге w_s и последующее их суммирование для получения полного прогиба w при статически неопределимых многослойных балках приводят лишь к приближенным решениям.

2.2.4. Многослойная балка, жестко закрепленная по двум концам. Неравномерно распределенная нагрузка $q(x)$. В этом случае применяется метод раздельных прогибов. Система является дважды статически неопределимой (рис. 9). Для ее расчета будем исходить из уравнений (2.34). С помощью неопределенного интеграла

$$F(x) = \int \left(\int \left(\int \left(\int q(x) dx \right) dx \right) dx \right) dx \quad (2.73)$$

(постоянные интегрирования здесь опускаются) посредством интегрирования уравнений (2.34) сразу же получим:

$$\left. \begin{aligned} w_M(x) &= \frac{1}{8s} [F(x) + C_4 x^3 + C_3 x^2 + C_2 x + C_1]; \\ w_Q(x) &= \frac{1}{A} [-F''(x) + D_2 x + D_1]. \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

Так как уравнения (2.74) должны удовлетворять и уравнению (2.32), то между постоянными интегрирования D_2 и C_4 получаем отношение $D_2 = -6C_4$. Оставшимся пяти постоянным C_1, C_2, C_3, C_4 и D_1 противопоставлены четыре граничных условия: $w(0) = 0$, $w(l) = 0$, $w'_M(0) = 0$, $w'_M(l) = 0$. Так как C_1 и D_1 не могут быть определены по отдельности, а только в их сумме, то точно так же, как и в пп. 2.2.1 и 2.2.2, необходимо исключение раздельных прогибов при $x=0$:

$$w_M(0) = 0, \quad w_Q(0) = 0.$$

Подстановка уравнения (2.74) в уравнения граничных условий после краткого расчета дает:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -F(0); \quad C_2 = -F'(0); \quad D_1 = F''(0); \\ C_3 &= \frac{(1-6\beta)R_1 - 3R_2}{(1+12\beta)l^2}; \quad C_4 = \frac{2R_2 - R_1}{(1+12\beta)l^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

где R_1 и R_2 являются сокращениями для $R_1 = l[F'(l) - F'(0)]$, $R_2 = [F(l) - F(0)] - l[F'(l) - F'(0)] - \beta l^2[F''(l) - F''(0)]$.

Подстановка уравнений (2.75) в уравнение (2.74) дает раздельные прогибы $w_M(x)$ и $w_Q(x)$, и путем сложения получаем полный прогиб $w(x)$.

Равномерно распределенная нагрузка q_0 . В соответствии с (2.73)

$$F(x) = \frac{q_0 x^4}{24}, \quad F'(x) = \frac{q_0 x^3}{6}, \quad F''(x) = \frac{q_0 x^2}{2},$$

и из уравнения (2.75) следует, что

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad D_1 = 0, \quad C_3 = \frac{q_0 l^2}{24}, \quad C_4 = -\frac{q_0 l}{12},$$

тем самым из уравнения (2.74) при $\xi = x/l$ следует, что

$$w_H = \frac{q_0 l^4}{24 B_S} \xi^2 (1 - 2\xi + \xi^2), \quad w_Q = \frac{q_0 l^2}{2A} \xi (1 - \xi). \quad (2.76)$$

Значение полного прогиба получается сложением w_H и w_Q с учетом (2.47):

$$w = \frac{q_0 l^4}{24 B_S} [\xi^2 (1 - 2\xi + \xi^2) + 12 \beta \xi (1 - \xi)]. \quad (2.77)$$

Сдвигающие усилия получаются из уравнения (2.76) с учетом (2.31) и имеют следующий вид:

$$M = \frac{q_0 l^2}{12} (1 - 6\xi + 6\xi^2); \quad Q = \frac{q_0 l}{2} (1 - 2\xi). \quad (2.78)$$

Оба предельных случая $A = \infty$ и $B_S = \infty$ дают $w_B = w_H$ и $w_S = w_Q$, т.е. справедливо также, что $w = w_B + w_S$. Следовательно, прогиб w_S и прогиб при сдвиге w_Q могут быть определены независимо один от другого, а затем суммированы для получения значения полного прогиба, хотя данная многослойная балка статически неопределима. Но это является все-таки исключением и объясняется тем, что система и нагрузка симметричны относительно середины балки.

Сосредоточенная нагрузка P в пролете. Вместо $x=e$ и $\xi=e/l=\epsilon$ ($0 < \epsilon < 1$) действует сосредоточенная нагрузка P . Она может быть выражена с помощью δ -функции Дирака в форме

$$q(x) = P \delta(x-e). \quad (2.79)$$

δ -функция делится на

$$\left. \begin{aligned} \delta(x-e) &= 0 \quad \text{для} \quad x \neq e, \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{x=e-\Delta x}^{x=e+\Delta x} \delta(x-e) dx &= 1; \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

ее интеграл

$$h(x-e) = \int_{z=-\infty}^x \delta(z-e) dz = \begin{cases} 0 & \text{для } x < e \\ 1 & \text{для } x > e \end{cases} \quad (2.81)$$

является функцией скачков Хивисайда. С произвольной непрерывной функцией $f(x)$ справедливы следующие отношения:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(x) \delta(z-e) dz &= h(x-e) f(e); \\ \int_{-\infty}^x f(x) h(z-e) dz &= h(x-e) \int_{z=e}^x f(z) dz. \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

С помощью уравнения (2.79) для сосредоточенной нагрузки P для данной многослойной балки можно использовать отношения (2.73) — (2.75). Поэтому можно отказаться от обычного, но сложного способа интегрирования по ступеням в диапазонах $0 \leq x \leq e$ и $e \leq x \leq l$ дифференциальных уравнений (2.34), а также от вычисления пяти дополнительных постоянных интегрирования с помощью пяти переходных условий:

$$w_{H1}(e) = w_{H2}(e); \quad w_{Q1}(e) = w_{Q2}(e);$$

$$w'_{H1}(e) = w'_{H2}(e); \quad w''_{H1}(e) = w''_{H2}(e);$$

$$w'_{Q1}(e) - w'_{Q2}(e) = P/A -$$

и с помощью уравнения (2.73):

$$F(x) = \frac{P(x-e)^3}{6} h(x-e); \quad F'(x) = \frac{P(x-e)^2}{2} h(x-e);$$

$$F''(x) = P(x-e) h(x-e).$$

Из уравнения (2.75) следует, что

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad D_1 = 0, \quad C_3 = \frac{Pl}{2} \varepsilon(1-\varepsilon) \frac{1-\varepsilon+6\beta}{1+12\beta},$$

$$C_4 = -\frac{P}{6} (1-\varepsilon) \frac{(1-\varepsilon)(1+2\varepsilon)+12\beta}{1+12\beta},$$

а тем самым с учетом (2.74) после краткого расчета получаем:

$$\left. \begin{aligned} w_{H1} &= \frac{Pl^3}{6B_s} (1-\varepsilon) \left[\frac{3\varepsilon(1-\varepsilon+6\beta)}{1+12\beta} \xi^2 - \frac{(1-\varepsilon)(1+2\varepsilon)+12\beta}{1+12\beta} \xi^3 \right]; \\ w_{H2} &= \frac{Pl^3}{6B_s} \varepsilon \left[-\xi^2 + 3\varepsilon\xi - 3 \frac{\varepsilon(2-\varepsilon)+6(1+\varepsilon)\beta}{1+12\beta} \xi^2 + \frac{\varepsilon(3-2\varepsilon)+12\beta}{1+12\beta} \xi^3 \right]; \\ w_{Q1} &= \frac{Pl}{A} (1-\varepsilon) \frac{(1-\varepsilon)(1+2\varepsilon)+12\beta}{1+12\beta} \xi; \\ w_{Q2} &= \frac{Pl}{A} \varepsilon \left[1 - \frac{\varepsilon(3-2\varepsilon)+12\beta}{1+12\beta} \xi \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

где индекс 1 действителен для $0 \leq \xi \leq e$, а индекс 2 — для $e \leq \xi \leq l$.

Полный прогиб получается путем сложения w_H и w_Q с учетом (2.47); после подсчета значения w_1 и w_2 принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{Pl^3}{6B_s} (1-\varepsilon) \xi \left[\frac{(1-\varepsilon)(1+2\varepsilon)+12\beta}{1+12\beta} (6\beta-\xi^2) + \frac{3\varepsilon(1-\varepsilon+6\beta)}{1+12\beta} \xi \right]; \\ w_2 &= \frac{Pl^3}{6B_s} \varepsilon (1-\xi) \left[(6\beta-\xi^2) + \frac{\varepsilon(3-\varepsilon)+6(1+3\varepsilon)\beta}{1+12\beta} \xi - \frac{\varepsilon(3-2\varepsilon)+12\beta}{1+12\beta} \xi^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

Сдвигающие усилия получаются из отношений (2.84) и (2.31) и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= Pl(1-\epsilon) \left[-\frac{\epsilon(1-\epsilon+6\beta)}{1+12\beta} + \frac{(1-\epsilon)(1+2\epsilon)+12\beta}{1+12\beta} \xi \right]; \\ M_2 &= Pl\epsilon \left[\frac{\epsilon(2-\epsilon)+6(1+\epsilon)\beta}{1+12\beta} - \frac{\epsilon(3-2\epsilon)+12\beta}{1+12\beta} \xi \right]; \\ Q_1 &= P(1-\epsilon) \frac{(1-\epsilon)(1+2\epsilon)+12\beta}{1+12\beta}; \\ Q_2 &= -P\epsilon \frac{\epsilon(3-2\epsilon)+12\beta}{1+12\beta} \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

Оба предельных случая $A = \infty$ и $B_3 = \infty$ дают $w_B \neq w_M$ и $w_S \neq w_Q$; кроме того, $w = w_M + w_O = w_B + w_S$.

Следовательно, справедливо то же самое правило, что и в п. 2.2.3, т.е. как и в случае статически неопределимых многослойных балок.

В особом случае, когда $\epsilon = 1/2$ (т.е. сосредоточенная нагрузка P в середине пролета), результаты существенно упрощаются. Уравнения (2.84) и (2.85) после краткого преобразования дают следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{Pl^3}{48B_3} \xi^2(3-4\xi) + \frac{Pl}{2A} \xi; \\ w_2 &= \frac{Pl^3}{48B_3} (1-\xi)^2(4\xi-1) + \frac{Pl}{2A} (1-\xi); \\ M_1 &= \frac{Pl}{8}(-1+4\xi); \quad Q_1 = \frac{P}{2}; \quad M_2 = \frac{Pl}{8}(3-4\xi); \quad Q_2 = -\frac{P}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.86)$$

В данном случае, несмотря на статическую неопределимость системы, справедливо, что $w_M = w_B$, а $w_Q = w_S$. Но это (как и при равномерно распределенной нагрузке в п. 2.2.4) исключительный случай, обусловленный симметрией системы и нагрузкой в середине пролета.

Если в уравнения (2.84) и (2.85) подставить $P = 1$, то получим линию влияния для прогиба w и для сдвигающих усилий M и Q . Они могут быть применены для расчета w , M и Q при любой распределенной нагрузке $q(x)$ [см. (2.52) и (2.53)].

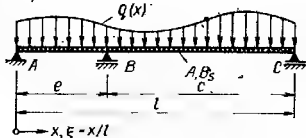
2.2.5. Двухпролетные многослойные балки. Произвольная поперечная нагрузка $q(x)$. Применяется метод раздельных прогибов. Система статически неопределима (рис. 10): ее расчет осуществляется с помощью метода наложения (см. пояснения в п. 2.2.3). В качестве статической неопределимости X берется опорная реакция в точке B . Если полученные из $q(x)$, согласно уравнению (2.57), раздельные прогибы обозначить w_{Mq} и w_{Qq} и в уравнение (2.63) подставить $P = -X$, а $\xi = \epsilon$ то для полного прогиба балки в точке B от действия $q(x)$ и X получим

$$w(\epsilon) = w_{Mq}(\epsilon) + w_{Qq}(\epsilon) - \frac{Xl^3}{3B_3} \epsilon(1-\epsilon)(\epsilon - \epsilon^2 + 3\beta).$$

С учетом уравнения (2.47) из условия $w(\epsilon) = 0$ следует

$$X = \frac{3B_3}{l^3} \frac{w_{Mq}(\epsilon) + w_{Qq}(\epsilon)}{\epsilon(1-\epsilon)(\epsilon - \epsilon^2 + 3\beta)}. \quad (2.87)$$

Рис. 10. Двухпролетная многослойная балка под действием поперечной нагрузки



С определением величины X известны также все другие статические величины данной многослойной балки.

Равномерно распределенная нагрузка q_0 . Из уравнения (2.60) для $\xi = \epsilon$ следует, что

$$w_q(\epsilon) = w_{M_q}(\epsilon) + w_{q_q}(\epsilon) = \frac{q_0 l^4}{24 B_s} \epsilon (1-\epsilon)(1+\epsilon - \epsilon^2 + 12\beta),$$

таким образом, уравнение (2.87) непосредственно дает

$$X = \frac{q_0 l}{8} \frac{1+\epsilon - \epsilon^2 + 12\beta}{\epsilon(1-\epsilon) + 3\beta}. \quad (2.88)$$

Теперь все статические величины получаются согласно уравнению (2.68).

Из-за сложности получаемых выражений указываются только сдвигающие усилия. Изгибающий момент получается совместным решением отношений (2.58) и (2.61), последнее для $P = -X$ согласно уравнению (2.88).

Поперечная сила отсюда получается посредством дифференцирования:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{q_0 l^2}{8} \xi \left[\frac{(1-\epsilon)(\epsilon^2 + 3\epsilon - 1) + 12\epsilon\beta}{\epsilon(1-\epsilon) + 3\beta} - 4\xi \right]; \\ M_2 &= \frac{q_0 l^2}{8} (1-\epsilon) \left[-\frac{\epsilon(1+\epsilon - \epsilon^2 + 12\beta)}{\epsilon(1-\epsilon) + 3\beta} + 4\xi \right]; \\ Q_1 &= \frac{q_0 l}{8} \left[\frac{(1-\epsilon)(\epsilon^2 + 3\epsilon - 1) + 12\epsilon\beta}{\epsilon(1-\epsilon) + 3\beta} - 8\xi \right]; \\ Q_2 &= \frac{q_0 l}{8} \left[\frac{\epsilon(5 - 3\epsilon - \epsilon^2) + 12(1+\epsilon)\beta}{\epsilon(1-\epsilon) + 3\beta} - 8\xi \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

где индекс 1 действителен для $0 \leq \xi \leq \epsilon$ (пролет AB), а индекс 2 — для $\epsilon \leq \xi \leq 1$ (пролет BC).

Для средней опоры B ($\xi = \epsilon$) получим:

$$\left. \begin{aligned} M_B &= -\frac{q_0 l^2}{8} \frac{\epsilon(1-\epsilon)(1-3\epsilon + 3\epsilon^2)}{\epsilon(1-\epsilon) + 3\beta}; \\ Q_{1B} &= -\frac{q_0 l}{8} \frac{(1-\epsilon)(1-3\epsilon + 7\epsilon^2) + 12\epsilon\beta}{\epsilon(1-\epsilon) + 3\beta}; \\ Q_{2B} &= +\frac{q_0 l}{8} \frac{\epsilon(5 - 11\epsilon + 7\epsilon^2) + 12(1-\epsilon)\beta}{\epsilon(1-\epsilon) + 3\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

где Q_{1B} и Q_{2B} — наибольшие по величине поперечные силы в пролетах AB и BC , M_B — наибольший по величине отрицательный изгибающий момент двухпролетной многослойной балки. Наибольшие положительные изгибающие моменты в пролетах AB и BC возникают там, где $Q_1 = 0$ и $Q_2 = 0$. С помощью уравнения (2.89) после расчета получаем:

$$\left. \begin{aligned} \max M_1 &= \frac{q_0 t^2}{8} \left[\frac{(1-\varepsilon)(\varepsilon^2 + 3\varepsilon - 1) + 12\varepsilon\beta}{4\varepsilon(1-\varepsilon) + 12\beta} \right]^2; \\ \max M_2 &= \frac{q_0 t^2}{8} \left[\frac{\varepsilon(3 - 5\varepsilon + \varepsilon^2) + 12(1-\varepsilon)\beta}{4\varepsilon(1-\varepsilon) + 12\beta} \right]^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

Самое большое по величине из трех значений M_B , $\max M_1$ и $\max M_2$ определяет параметры внешних слоев многослойной балки, а самое большое по величине из двух значений Q_{1B} и Q_{2B} служит для проверки прочности среднего слоя на сдвиг.

Рассмотрим два случая.

Особый случай $\varepsilon = 1/2$. Пролеты AB и BC одинаковы по длине; (2.90) и (2.91) дают следующее:

$$\left. \begin{aligned} M_S &= -\frac{q_0 t^2}{32} \frac{1}{1+12\beta}; & \max M_F &= +\frac{9q_0 t^2}{512} \left(\frac{1+16\beta}{1+12\beta} \right)^2; \\ Q_{2B} &= -Q_{1B} = +\frac{q_0 t}{16} \frac{5+48\beta}{1+12\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.92)$$

Как легко можно доказать, $|M_S| = \max M_F$ для

$$\beta_0 = \frac{2\sqrt{2}-1}{48} = 0,03809;$$

тогда

$$|M_S| = \max M_F = \frac{3-2\sqrt{2}}{8} q_0 t^2 = 0,02145 q_0 t^2.$$

Для $0 \leq \beta < \beta_0$ определяющим является опорный момент M_S , а для $\beta > \beta_0$ — максимальный пролетный момент для определения напряжений во внешних слоях.

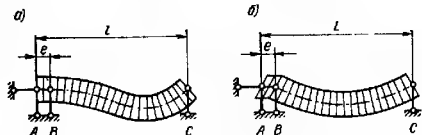
Предельный случай $\varepsilon = 0$. Пролет AB сокращается по длине до нуля, что соответствует своего рода защемлению для многослойной балки BC , для которой справедливо не граничное условие $\gamma_2 = 0$ (как в п.2.2.3, см. также рис. 8), а $\gamma_1 = 0$. Уравнение (2.90) дает:

$$\text{для } \beta = 0: \quad M_B = -q_0 t^2/8, \quad Q_{1B} = -\infty;$$

$$\text{для } \beta \neq 0: \quad M_B = 0, \quad Q_{1B} = -q_0 t/24\beta.$$

В случае, когда $\beta = 0$, момент защемления M_B при $\varepsilon = 0$ совпадает с M согласно (2.72), при $\beta = 0$ и $\varepsilon = 0$ он соответствует моменту защемления слева неподвижно закрепленной балки и справа шарнирно-опертой балки. Поперечная сила Q_{1B} (теоретически) бесконечно велика, так как момент защемления M_B через пару сил на опоре должен восприниматься бесконечно малым плечом рычага. В случае, когда $\beta \neq 0$, напротив, бесконечно большая поперечная сила Q_{1B} повлекла бы за собой также бесконечно большой угол сдвига $\gamma_{1B} = Q_{1B}/A$, что невозможно из-за геометрических связей системы; следовательно, устанавливается поперечная сила только конечной величины. Соответствующая моменту

Рис. 11. Схема деформации двухпролетной многослойной балки при $\varphi_0 = \text{const}$ и $e=0$; $\alpha - \beta=0$; $\sigma - \beta \neq 0$



закрепления M_B пара сил на опоре равно поэтому нулю из-за бесконечно малого плеча рычага. Картина деформации многослойной балки для случая, когда $\beta=0$ и $\beta \neq 0$, представлена на рис. 11.

2.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

2.3.1. Выражения энергии. Энергия деформации изогнутой многослойной балки. Энергия деформации W многослойной балки длиной l с тонкими внешними слоями, на которую действуют поперечная и продольная нагрузки, получается из общей формулы

$$W = \frac{1}{2} \int_{(V)} (\sigma \varepsilon + \tau \gamma) dV. \quad (2.93)$$

Подставив в уравнение (2.93) σ согласно (2.11), τ согласно (2.10) и ε согласно (2.8) и предположив, что в (2.8) $\gamma_2 = \gamma - w'$ и $u' = 0^*$ при $dV = dx dy dz$, после выполнения интегрирования по ширине и высоте балки и с учетом значения поперечного сечения B_S и A , согласно (2.21) и (2.17), получим

$$W = \frac{1}{2} \int_{(l)} B_S (\gamma' - w'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_{(l)} A \gamma^2 dx. \quad (2.94)$$

Если W , согласно (2.29), выразить через раздельный прогиб, то имеют место выражения:

$$\left. \begin{aligned} W &= W_N + W_\sigma; \\ W_N &= \frac{1}{2} \int_{(l)} B_S w_N'^2 dx; \\ W_\sigma &= \frac{1}{2} \int_{(l)} A w_\sigma'^2 dx. \end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

В уравнении (2.95) W_N является энергией перемещения w_N , вызванной действием изгибающего момента, а W_σ — энергией деформации сдвига w_σ , вызванной действием поперечной силы.

Потенциальная энергия внешних сил. Внешняя нагрузка многослойной балки состоит из поперечной нагрузки $q(x)$ и продольной нагрузки N ; соответственно этому потенциальная энергия внешних сил U

*Осевые деформации оси центра тяжести балки интереса не представляют, так как в данном случае исследуются напряжения многослойной балки при чистом изгибе и сдвиге (см. п. 2.1.2), поэтому $u' = 0$.

состоит из двух компонентов U_q и U_N . Так как $d\bar{u} = 0$, то $ds' = ds + d\bar{u} = ds$. Таким образом, для $w'^2 \ll 1$ (рис. 12) будет

$$-du = ds - dx = (\sqrt{1-w'^2} - 1)dx \approx \frac{1}{2}w'^2 dx$$

и, следовательно,

$$dU_q = -q w dx, \quad dU_N = -N du = \frac{1}{2} N w'^2 dx.$$

Тем самым потенциальная энергия $U = U_q + U_N$, внешних сил выглядит следующим образом:

$$U = - \int_{(l)} q w dx + \frac{1}{2} \int_{(l)} N w'^2 dx. \quad (2.96)$$

Если в случае $N = 0$ выразить U через раздельные прогибы согласно (2.29), то

$$\left. \begin{aligned} U &= U_M + U_q; \\ U_M &= - \int_{(l)} q w_M dx, \quad U_q = - \int_{(l)} q w_q dx. \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

Когда $N \neq 0$, невозможно разложение U на компонент U_M , зависящий от w_M , и компонент U_q , зависящий от w_q .

Энергия деформации упругих опор. Если многослойная балка имеет упруго-оседающие опоры, шарнирно-соединенные с балкой и защемленные в основании, то в них накапливается энергия деформации

$$V = \frac{1}{2} \sum_{(\mu)} c_\mu w_\mu^2 + \frac{1}{2} \sum_{(\nu)} c_\nu \gamma_{2\nu}^2; \quad (2.98)$$

при этом $\mu = 1, 2, \dots$ означает числовой индекс упруго-шарнирных опор, а $\nu = 1, 2, \dots$ — числовой индекс поворотно-упругих защемлений. Разложение V на зависящий только от w_M компонент V_M и компонент V_q , зависящий только от w_q невозможно.

2.3.2. Методы определения энергии. Минимум потенциальной энергии. Согласно принципу возможных перемещений, если многослойной балке, находящейся в состоянии равновесия, сообщить из ее положения равновесия возможное перемещение, то возможная работа, созданная внешними и внутренними силами, равна нулю:

$$\delta A = \delta A_a + \delta A_i = 0. \quad (2.99)$$

При $\delta A_a = -\delta U$; $\delta A_i = -(\delta W + \delta V)$ и потенциальной энергии системы

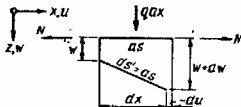
$$P = W + U + V, \quad (2.100)$$

согласно (2.94), (2.96) и (2.98), из уравнения (2.99) имеем

$$\delta P = 0, \quad (2.101)$$

т.е. потенциальная энергия системы в положении равновесия имеет

Рис. 12. Смещение оси центра тяжести изогнутой многослойной балки



экстремум или значение, соответствующее точке перегиба. В случае стабильного положения равновесия многослойной балки оказывается $\delta\P > 0$, следовательно, речь идет о минимуме потенциальной энергии. Действительно, возникающие перемещения w и γ , соответствующие положению равновесия многослойной балки по сравнению со всеми возможными согласованными с условиями опирания и совместимости многослойной балки системами смещения $w + \delta w$, $\gamma + \delta \gamma$, характеризуются тем, что для них потенциальная энергия P принимает наименьшее значение.

Когда $N = 0$ и отсутствуют упругооседающие опоры, потенциальная энергия составляется из двух компонентов: один из них P_M — от изгиба, зависящий от w_N , а другой P_d — от сдвига, зависящий от w_d :

$$P = P_M + P_d; \quad P_M = W_M + U_M, \quad P_d = W_d + U_d. \quad (2.102)$$

Следовательно, из уравнения (2.101) с учетом (2.102) следует, что

$$\delta P = \delta P_M + \delta P_d = 0. \quad (2.103)$$

Уравнения Эйлера для вариационного метода нахождения минимума потенциальной энергии P . Задача нахождения минимума функционала

$$P = \int_a^b F(w, w', w''; \gamma, \gamma') dx \quad (2.104)$$

является проблемой вариационного расчета. Соответствующие уравнения Эйлера выглядят следующим образом:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{\partial F}{\partial w} = 0; \quad - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \gamma'} \right) + \frac{\partial F}{\partial \gamma} = 0. \quad (2.105)$$

Если уравнения (2.94), (2.96) и (2.98) подставить в выражение (2.100), то уравнения Эйлера (2.105) дают дифференциальные уравнения для w и γ , которые после незначительных преобразований совпадают с уже известными уравнениями (2.25). Принцип минимума потенциальной энергии дает, как и следовало ожидать, те же самые результаты, что и условия равновесия. Энергия деформации V упругих опор не вносит в эти дифференциальные уравнения никаких дополнительных членов, так как возникающие в уравнениях Эйлера частные производные выполняются только по w , w' , w'' , γ и γ' , а не по w_N и γ_{2d} . Упругие опоры входят в расчет только через граничные и промежуточные условия.

Решение методом Рунца. В некоторых случаях точное решение дифференциальных уравнений (2.25) и (2.26) затруднительно, например

когда значения поперечного сечения B_z и A и продольная сила N являются постоянными лишь по участкам; следовательно, в некоторых участках балки обнаруживаются скачки¹; или когда имеется сложная функция нагрузки $q(x)$ или сложные условия опирания (например, упругие опоры).

В этих случаях ω и γ могут быть записаны в форме:

$$\left. \begin{aligned} \omega(x) &= \sum_{j=1}^n \omega_j(x; a_j, b_j, c_j, \dots), \\ \gamma(x) &= \sum_{j=1}^n \gamma_j(x; a_j, b_j, c_j, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2.106)$$

или же в упрощенной форме:

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^n a_j \omega_j(x); \quad \gamma(x) = \sum_{j=1}^n b_j \gamma_j(x). \quad (2.107)$$

При этом функции ω_j и γ_j ($j=1, 2, \dots, n$) являются произвольными (свободно допускающими выбор), но должны выполнять по крайней мере все геометрические и по возможности также статические граничные и промежуточные условия. Если ω_j и γ_j удовлетворяют только геометрическим (т.е. тем, которые касаются смещений ω , $\gamma_1 = \omega'$ и $\gamma_2 = \gamma - \omega'$) граничным и промежуточным условиям, то их называют допустимыми функциями; если ω_j и γ_j удовлетворяют еще и статическим (т.е. тем, которые касаются сдвигающих усилий M и Q) граничным и промежуточным условиям, то их называют сравнительными функциями. В выражении (2.106) величины ω_j и γ_j , кроме x , зависят еще линейно и от многих свободных постоянных a_j , b_j , c_j и т.д. Напротив, в выражении (2.107) величины ω_j и γ_j являются лишь функциями от x , а свободные постоянные a_j и b_j являются множителями перед ω_j или γ_j . Когда и каким из двух выражений (2.106) или (2.107) можно пользоваться, зависит от условий опирания многослойной балки и от вида избранных функций² для ω_j и γ_j . Примеры можно найти в п. 2.3.3.

Если выражение (2.106) или (2.107) подставить в формулу определения потенциальной энергии Π , то вместо функционала формы (2.104) получается определенный интеграл, который в общем можно легко вычислить и который дает выражение потенциальной энергии в форме

$$\Pi = \Pi(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots). \quad (2.108)$$

Так как, согласно предпосылке, функции ω_j и γ_j линейно зависят от свободных постоянных a_j , b_j , ..., то Π получается в качестве квадратической функции от a_j , b_j , ... (где $j=1, 2, \dots, n$). Необходимые условия для экстремума (минимума) Π , по правилам дифференциальных расчетов, будут:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial b_j} = 0, \dots \quad (j=1, 2, \dots). \quad (2.109)$$

¹Случай непрерывно изменяющихся значений B_z , A и N при дифференциальных уравнениях (2.25) и (2.26) исключен (см. п. 2.5.2).

²Например, полиномы или тригонометрические функции.

Выражение (2.109) дает такое множество линейных уравнений, сколько имеется неизвестных постоянных $a_i, b_i, \dots$. После их подстановки в уравнение (2.108) или (2.107) становятся известны искомые приближенные решения для $w(x)$ и $\varphi(x)$.

Это является основной идеей метода Ритца применительно к принципу нахождения минимума потенциальной энергии у многослойных балок. Энергия деформации V упругих опор входит при этом (иначе, чем в л. 2.3.2) в уравнения, вытекающие из минимизирования Π , так как и смещения опор w_M и φ_{20} содержат постоянные $a_i, b_i, \dots$ по которым и производится дифференцирование.

Решения, вытекающие из метода Ритца для $w(x)$ и $\varphi(x)$, могут быть как точными, так и приближенными. Точные решения получаются, например, в случае их определения по формуле (2.107), когда среди сравнительных функций w_j и φ_j случайно найдутся "правильные" функции или когда для w_j и φ_j ($j = 1, 2, 3, \dots$) вводится так называемая полная система функций (с $n = \infty$), с помощью которой можно точно приблизить любую математическую функцию в каждой точке x замкнутой области. Во всех остальных случаях получают приближенные решения.

При расчете многослойной балки методом Ритца кроме только что описанного способа существуют и другие варианты.

А. $\varphi(x)$ вводится не в форме (2.106) или (2.107), а определяется, например, посредством интегрирования второго уравнения из (2.25) (оно соответствует условию "поперечная нагрузка — равновесие"). Преимущество этого варианта в том, что выражение потенциальной энергии Π из-за предварительно выполненного условия "поперечная нагрузка — равновесие" содержит меньше неизвестных постоянных. Число уравнений, которые надо решить, также меньше. Но при данном способе увеличивается количество предварительной работы.

Б. Вместо выражений для w и φ выбираются выражения для раздельных прогибов w_M и w_B , которые подставляются в выражение потенциальной энергии Π ; из минимизирования Π следуют затем все нужные уравнения. Подобным же образом, как и в случае а, посредством первого уравнения (2.32) (оно соответствует условию "моменты — равновесие") постоянные в w_B , например, могут быть сведены к постоянным в w_M (в данном случае включая постоянную интегрирования), тем самым число неизвестных сокращается.

В. Во всех случаях, когда выражение потенциальной энергии Π можно представить в форме (2.102), Π_M и Π_B минимизируются не в сумме, а каждый в отдельности. Это хотя и упрощает расчет, так как для неизвестных постоянных, содержащихся в w_M и w_B , получают две раздельные системы уравнений, но является точным только в тех случаях, когда и w , согласно $w = w_B + w_S$, разлагается на чистый прогиб $w_B = w_M$ и чистый прогиб при сдвиге $w_S = w_B$ [ср. п. 2.2, а именно (2.42) по (2.44)]. С другой стороны, раздельная минимизация Π_M и Π_B представляет собой дополнительное уточнение Π .

Метод Ритца применяется преимущественно для расчета собственных значений (критическая нагрузка при продольном изгибе и собственная частота колебаний), следовательно, тогда, когда отсутствует поперечная нагрузка q . В следующем п. 2.3.3 для объяснения выражений (2.106) и (2.107) для двух различных случаев опирания составлены функции

сравнения, пригодные для расчета критической нагрузки при продольном изгибе, а в последующем п. 2.3.4 для объяснения метода Ритца дается пример расчета линии прогиба многослойной балки для заданной поперечной нагрузки $q(x)$.

2.3.3. Примеры функций сравнения для двух случаев опирания многослойной балки. Шарнирное опирание по двум сторонам (см. рис. 6). Согласно табл. 2.1, граничные условия имеют следующий вид:

$$\omega(0)=0, \quad \omega(l)=0; \quad \gamma'(0)-\omega''(0)=0; \quad \gamma'(l)-\omega''(l)=0.$$

Из второго уравнения (2.25) для $q(x)=0$ и $N=-P$ следует, что

$$A \gamma'(x) - P \omega''(x) = 0 \quad (2.110)$$

для всех x , следовательно, и для $x=0$ и $x=l$. Так что из последних двух вышеприведенных граничных условий вытекают четыре новых условия:

$$\omega''(0)=0; \quad \omega''(l)=0; \quad \gamma'(0)=0; \quad \gamma'(l)=0.$$

В данном случае в качестве сравнительных функций подходят тригонометрические функции:

$$\omega_j = \sin \frac{j\pi x}{l}; \quad \gamma_j = \cos \frac{j\pi x}{l} \quad (j=1, 2, \dots),$$

выполняющие все без исключения граничные условия; следовательно, с помощью уравнения (2.107) имеет место следующее суммарное математическое выражение:

$$\omega = \sum_{j=1}^n a_j \sin \frac{j\pi x}{l}; \quad \gamma = \sum_{j=1}^n b_j \cos \frac{j\pi x}{l}. \quad (2.111)$$

Ряды (2.111) позволяют произвести расчет первых собственных n значений P_j . При $n=\infty$ ряды (2.111) представляют собой полную систему функций.

Если γ определить с помощью уравнения (2.110) из ω согласно уравнению (2.111), то для γ снова получим выражение формы (2.111), но при

$$b_j = \frac{j\pi}{l} \frac{P}{A} a_j. \quad (2.112)$$

Следовательно, число неизвестных сокращается наполовину.

Защемление и шарнирное опирание (см. рис. 8). Согласно табл. 2.1, граничные условия имеют следующий вид:

$$\omega(0)=0; \quad \omega(l)=0; \quad \gamma(0)-\omega'(0)=0; \quad \gamma'(l)-\omega''(l)=0;$$

Из последнего вышеприведенного граничного условия вытекают два новых условия:

$$\omega''(l)=0; \quad \gamma'(l)=0.$$

В качестве сравнительных функций здесь выбраны полиномы, причем должно произойти сокращение на одно одночленное выражение:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= 2a_1 t^3 x + 3(b_1 - a_1) t^2 x^2 + (a_1 - 5b_1) t x^3 + 2b_1 x^4; \\ \gamma_1 &= 2a_1 t^3 - (2c_1 + 3d_1) t^2 x + c_1 t x^2 + d_1 x^3. \end{aligned} \right\} \quad (2.113)$$

Сравнительные функции (2.113) выполняют все граничные условия и соответствуют выражению типа (2.106). С помощью выражения (2.113) можно определить только первое собственное значение $P_1 = P_K$.

Если γ определяется посредством уравнения (2.110) из ω согласно (2.113), то для γ снова получается выражение формы (2.113), но при

$$c_1 = 3 \frac{P}{A} (a_1 - 5b_1), \quad d_1 = 8 \frac{P}{A} b_1. \quad (2.114)$$

Следовательно, число неизвестных постоянных сокращается с четырех до двух.

2.3.4. Пример расчета линии прогиба энергетическим методом. *Задача.* Необходимо определить прогиб неподвижно закрапленной с двух сторон многослойной балки под действием синусообразной поперечной нагрузки баз продольного усилия энергетическим методом с помощью метода Ритца (рис. 13). Вследствие симметрии системы и нагрузки относительно середины пролета имеет место $\omega = \omega_B + \omega_S$ согласно п. 2.3.2, при применении раздельных прогибов ω_N и ω_Q потенциалы Π_N и Π_Q могут быть минимизированы по отдельности.

Минимизирование Π_N . Так как симметричная нагрузка позволяет ожидать симметричный прогиб при $x = l/2$, то для части изгиба ω_N выбирается симметричное выражение ряда

$$\omega_N(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \omega_{Nj}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left(1 - \cos \frac{2j\pi x}{l}\right); \quad (2.115)$$

Функции сравнения $\omega_{Nj} = 1 - \cos \frac{2j\pi x}{l}$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) выполняют все граничные условия:

$$\omega_N(0) = 0; \quad \omega_N(l) = 0; \quad \omega'_N(0) = 0; \quad \omega'_N(l) = 0.$$

Подстановка (2.115) в Π_N согласно (2.102) и приравнивание к нулю частных производных Π_N по неизвестным постоянным a_k ($k = 1, 2, \dots$) дает для них систему уравнений:

$$B_S \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_j \int_0^l \omega''_{Nj} \omega''_{Nk} dx \right] - \int_0^l q \omega_{Nk} dx = 0,$$

откуда с учетом уравнения (2.115) при

$$\int_0^l \omega''_{Nj} \omega''_{Nk} dx = \begin{cases} 0 & \text{для } j \neq k \\ \frac{8k^4 \pi^4}{l^3} & \text{для } j = k; \end{cases}$$

$$\int_0^l q \omega_{Nk} dx = \frac{q_0 l}{\pi} \frac{8k^4}{4k^2 - 1}$$

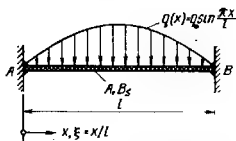


Рис. 13. Неподвижно закрепленная с двух сторон многослойная балка под действием синусоидальной нагрузки

непосредственно следует, что

$$a_k = \frac{q_0 l^4}{\pi^4 B_s} \frac{1/\pi}{k^2(4k^2-1)} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

а тем самым искомая часть изгиба составит

$$w_M = \frac{q_0 l^4}{\pi^4 B_s} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1/\pi}{j^2(4j^2-1)} (1 - \cos 2j\pi\xi). \quad (2.116)$$

w_q следует из w_M , согласно уравнению (2.116), посредством интегрирования первого уравнения (2.32) и с учетом граничных условий $w_q(0) = w_q(l) = 0$ и имеет следующий вид:

$$w_q = \frac{q_0 l^2}{\pi^2 A} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4/\pi}{4j-1} (1 - \cos 2j\pi\xi). \quad (2.117)$$

Полный прогиб w получается путем наложения w_M и w_q согласно уравнениям (2.116) и (2.117).

Минимизирование Π_q . Для прогиба от сдвига w_q выбирается симметричный $x = l/2$ ряд

$$w_q(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j w_{qj}(x) = \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} b_j \sin \frac{j\pi x}{l}. \quad (2.118)$$

Функции сравнений $w_{qj} = \sin \frac{j\pi x}{l}$ ($j = 1, 3, 5, \dots$) вы-

полняют граничные условия $w_q(0), w_q(l) = 0$. Подстановка выражения (2.118) в Π_q , согласно уравнению (2.102), и приравнение к нулю частных производных от Π_q по неизвестным постоянным b_k ($k = 1, 3, 5, \dots$) дает для них следующую систему уравнений:

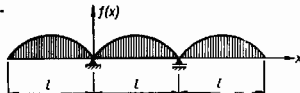
$$A \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \left[b_j \int_0^l w'_{qj} w'_{qk} dx \right] - \int_0^l q w_{qk} dx = 0,$$

откуда с учетом уравнения (2.118) при

$$\int_0^l w'_{qj} w'_{qk} dx = \begin{cases} 0 & \text{для } j \neq k \\ \frac{k^2 \pi^2}{2l} & \text{для } j = k; \end{cases}$$

$$\int_0^l q w_{qk} dx = \begin{cases} \frac{q_0 l}{2} & \text{для } j=1 \\ 0 & \text{для } j=3, 5, \dots \end{cases}$$

Рис. 14. Коммутативность функции синуса



непосредственно следует

$$b_1 = \frac{q_0 l^2}{\pi^2 A}, \quad b_3 = b_5 = \dots = 0,$$

а тем самым искомая часть сдвига составляет

$$w_q = \frac{q_0 l^2}{\pi^2 A} \sin \pi x / l. \quad (2.119)$$

Прогиб от изгиба w_M следует из w_q , согласно уравнению (2.119), посредством трехразового интегрирования первого уравнения (2.32) с учетом граничных условий $w_M(0) = w_M(l) = 0$, $w_M'(0) = w_M'(l) = 0$ и имеет вид

$$w_M = \frac{q_0 l^4}{\pi^4 B_S} (\sin \pi x / l + \pi x^2 / l^2 - \pi x / l). \quad (2.120)$$

Полный прогиб w получается путем суммирования w_M и w_q согласно уравнениям (2.120) и (2.119).

Сравнение результатов. Если сравнить w_M согласно уравнению (2.116) с w_M согласно уравнению (2.120), то после некоторого расчета находим, что бесконечный ряд в уравнении (2.116) представляет собой разложение в ряд Фурье выражения в скобках уравнения (2.120) с длиной периода l . Точно так же при сравнении w_q согласно (2.117) и w_q согласно (2.119) оказывается, что и здесь бесконечный ряд уравнения (2.117) есть разложение в ряд Фурье $\sin \pi x / l$ с длиной периода l (рис. 14). Следовательно, оба способа приводят к одинаковому результату.

Замечание относительно w_q : в функции сравнения $w_{qj} = 1 - \cos 2j\pi x / l$ в уравнении (2.117) при $x = 0$ и $x = l$ тангенциальная касательная совпадает с осью x , т.е. $w_{qj}(0) = w_{qj}(l) = 0$, в то время как представленная в уравнении (2.117) через бесконечный ряд функция $\sin \pi x / l$ при $x = 0$ и $x = l$ ни в коем случае не проходит горизонтально. Но если допустить, что $y = \sin \pi x / l$ слева и справа от данной многослойной балки длиной l продолжен в качестве коммутированной функции синуса (см. рис. 14), то при $x = 0$ и $x = l$ имеется разрыв первой производной от $-\pi / l$ к $+\pi / l$. Там, где возникают такие точки разрыва, разложение в ряд Фурье принимает соответствующее промежуточное значение, следовательно, в этом случае допускаемой величиной может быть нуль, т.е. так же как следует и из функций сравнения $w_{qj} = 1 - \cos 2j\pi x / l$ при $x = 0$ и $x = l$. Тогда в произвольно малой окрестности ϵ таких разрывностей совпадают разложение в ряд Фурье и представленная через него функция, если только достаточно будут учтены многочисленные члены ряда. Итак, ряд Фурье коммутированной синусоидальной функции является равномерно сходящимся в области $\epsilon \leq x \leq l - \epsilon$.

2.4.1. Температурный скачок между внешними слоями многослойной балки. Общие положения. Средний слой многослойной балки часто состоит из пористого пеноматериала с хорошими теплоизоляционными свойствами. Поэтому при одностороннем нагреве (например, от солнца) в обоих тонких внешних слоях могут установиться различные температуры. Разности температурных напряжений вызывают деформации изгиба, а частично и напряжения в многослойной балке, расчет которых будет дан позднее. Равномерные температурные деформации обоих внешних слоев, напротив, вызывают только удлинение или укорачивание балки и далее интереса для нас не представляют.

Дифференциальные уравнения. Если соотношения (2.22) "сдвигающее усилие — деформация" дополнить выражением, учитывающим влияние температуры, то найдем (рис. 15)

$$d\gamma_z = \frac{M}{B_s} dx + \frac{\alpha_{tu} T_u - \alpha_{tb} T_b}{\alpha} dx,$$

а с учетом

$$\vartheta^* = \frac{\alpha_{tu} T_u - \alpha_{tb} T_b}{\alpha} \quad (2.121)$$

получим

$$\gamma_z' = \frac{M}{B_s} + \vartheta^*, \quad \gamma = \frac{Q}{A} \quad (2.122)$$

Решая уравнения (2.122) относительно M и Q , найдем:

$$M = B_s (\gamma' - w'' - \vartheta^*); \quad Q = A\gamma. \quad (2.123)$$

Следовательно, значение M , согласно уравнению (2.123), определяется аналогично формуле (2.22), когда там $\gamma' - w''$ заменяется $\gamma' - w'' - \vartheta^*$, в Q остается неизменной. Подстановка уравнения (2.123) в условия равновесия (2.24) при условии, что $q = 0$ дает следующие выражения:

$$B_s (\gamma'' - w''' - \vartheta^{*'}) - A\gamma = 0; \quad A\gamma' + Nw'' = 0. \quad (2.124)$$

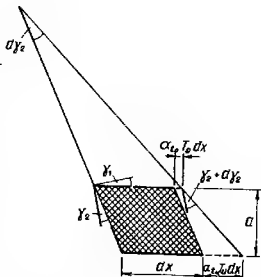
Расчленение этих двух дифференциальных уравнений дает следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{N}{A}\right) w'' - \frac{N}{B_s} w''' &= -\vartheta^{*'}; \\ \left(1 + \frac{N}{A}\right) \gamma'' - \frac{N}{B_s} \gamma' &= + \frac{N}{A} \vartheta^{*'} \end{aligned} \right\} \quad (2.125)$$

Это и есть искомые дифференциальные уравнения для w и γ вследствие разности температур внешних слоев при одновременном воздействии продольного усилия N . Их решения выполняют, конечно, и нерасчлененные дифференциальные уравнения (2.124), откуда вытекают известные

* ϑ^* может быть также переменной по x .

Рис. 15. Температурные деформации внешних слоев



зависимости между постоянными интегрирования в решениях уравнения (2.125) для w и γ . В особом случае, когда $N=0$, и при статически определимых системах ($M=0$, $Q=0$) уравнение (2.125), как это следует вследствие двукратного интегрирования или вытекает из уравнения (2.123), упрощается и принимает вид

$$w'' = -\vartheta = -\frac{\alpha_{t_1} T_1 - \alpha_{t_2} T_0}{a}, \quad \gamma = 0. \quad (2.126)$$

Примеры. а) Многослойная балка (двустороннее шарнирное опирание $N=0$, $\vartheta = \text{const}$, см. рис. 6).

Вследствие статической определимости многослойной балки целесообразно исходить из уравнения (2.126). Двукратное интегрирование и удовлетворение граничных условий $w(0)=0$, $w(l)=0$ при условии $\xi = x/l$ дает:

$$w = \frac{\vartheta l^2}{2} \xi(1-\xi); \quad \gamma = 0. \quad (2.127)$$

В многослойной балке не возникает изгибающих моментов, поперечных усилий, а следовательно, и напряжений.

б) Многослойная балка (слева—закрепление, справа—шарнирное опирание, $N=0$, $\vartheta = \text{const}$ см. рис. 8).

Вследствие статической неопределимости многослойной балки необходимо исходить из уравнения (2.125) при $N=0$; интегрирование обоих дифференциальных уравнений дает следующие выражения:

$$w = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4; \quad \gamma = D_1 x + D_2. \quad (2.128)$$

Так как уравнения (2.128) должны удовлетворять и уравнениям (2.124) для $N=0$, согласно (2.47) получаем соотношения:

$$D_1 = 0; \quad D_2 = -6\beta l^2 C_1. \quad (2.129)$$

Оставшиеся постоянные получаются из граничных условий $w(0)=0$, $w(l)=0$, $\gamma_2(0)=0$ и, согласно (2.122), $\gamma_2'(l) = \vartheta$ имеют вид:

$$C_1 = -\frac{\vartheta}{4(1+3\beta)l}; \quad C_2 = \frac{(1-6\beta)\vartheta}{4(1+3\beta)};$$

$$C_3 = \frac{3\beta\vartheta l}{2(1+3\beta)}; \quad C_4 = 0.$$

Подстановка в (2.128) при $\xi = x/l$ дает

$$w = \frac{\vartheta l^2}{4(1+3\beta)} [-\xi^3 + (1-6\beta)\xi^2 + 6\beta\xi], \quad \gamma = \frac{3\beta\vartheta l}{2(1+3\beta)}. \quad (2.130)$$

Сдвигающие усилия определяем с помощью уравнения (2.123) :

$$M = - \frac{3\vartheta B_s}{2(1+3\beta)} (1+\xi) ; \quad Q = \frac{3\vartheta B_s}{2(1+3\beta)l} . \quad (2.131)$$

в) Многослойная балка (двустороннее закрепление, $N=0$, $\vartheta = \text{const}$, см. рис. 9).

Многослойная балка статически неопределима, поэтому снова следует исходить из уравнений (2.128) и (2.129). Граничные условия $w(0)=0$, $w(l)=0$, $\gamma_2(0)=0$ и $\gamma_2(l)=0$ дают следующее: $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=0$, $C_4=0$, тем самым из уравнения (2.128) следует, что

$$w = 0, \quad \gamma = 0. \quad (2.132)$$

Сдвигающие усилия получаются из уравнения (2.123) и имеют вид:

$$M = - B_s \vartheta, \quad Q = 0. \quad (2.133)$$

Примечательно, что, несмотря на наличие изгибающего момента, деформации многослойной балки не возникает.

г) Двухпролетная многослойная балка (длина пролетов неравномерная, $N=0$, $\vartheta = \text{const}$, см. рис. 10).

Многослойная балка статически неопределима, ее расчет осуществляется методом суммирования (см. п. 2.2.3). В качестве статической переменной X выбирается опорная реакция в точке B . Так же как и в п. 2.2.5, справедливо выражение

$$w(\varepsilon) = w_\vartheta(\varepsilon) - \frac{X l^3}{3 B_s} \varepsilon (1-\varepsilon) (\varepsilon - \varepsilon^2 + 3\beta),$$

где $w_\vartheta(\varepsilon)$ — прогиб (2.127) вследствие ϑ при $\xi = \varepsilon$. Из условия $w(\varepsilon) = 0$ опорная реакция на средней опоре B получается

$$X = \frac{3\vartheta B_s}{2(\varepsilon - \varepsilon^2 + 3\beta)l}. \quad (2.134)$$

Наибольший изгибающий момент многослойной балки возникает на опоре B ; для него, а также для сдвигающих усилий получим:

$$\left. \begin{aligned} M_B &= - \frac{3\varepsilon(1-\varepsilon)\vartheta B_s}{2(\varepsilon - \varepsilon^2 + 3\beta)} ; \\ Q_{1B} &= - \frac{3(1-\varepsilon)\vartheta B_s}{2(\varepsilon - \varepsilon^2 + 3\beta)l} ; \\ Q_{2B} &= \frac{3\varepsilon\vartheta B_s}{2(\varepsilon - \varepsilon^2 + 3\beta)l} , \end{aligned} \right\} \quad (2.135)$$

где индекс 1 действителен для $0 \leq \xi \leq \varepsilon$ (пролет AB), а индекс 2 — для $\varepsilon \leq \xi \leq 1$ (пролет BC).

2.4.2. Поперечные колебания многослойной балки. Общие динамические уравнения. Если при знакопеременном изгибе многослойной балки пренебречь инерционными силами*, то общие динамические уравнения

* Их влияние в основном незначительно, особенно в многослойных балках, так как здесь $|\gamma_x| < |\omega|$

для многослойной балки можно вывести из статических уравнений (2.25), когда в соответствии с принципом Даламбера в значении поперечной нагрузки q учесть отрицательную силу инерции $-\mu \partial^2 w / \partial t^2$.^{*} Заменяя в уравнении (2.25) q на $q - \mu \partial^2 w / \partial t^2$, получим:

$$B_s(w'' - w''') - A\gamma = 0; \quad A\gamma' + Nw'' - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q. \quad (2.136)$$

Рассчитав оба частных дифференциальных уравнения, находим, что

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{N}{A}\right) w'' - \frac{N}{B_s} w'' - \frac{\mu}{A} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{q}{B_s} - \frac{q''}{A}; \\ \left(1 + \frac{N}{A}\right) \gamma'' - \frac{N}{B_s} \gamma'' - \frac{\mu}{A} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} + \frac{\mu}{B_s} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} &= -\frac{q''}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (2.137)$$

Вынужденные колебания. Если подставить в уравнение (2.137)

$$q(x, t) = q(x) \sin \omega t, \quad (2.138)$$

то отношения (2.137) представляют собой дифференциальные уравнения для незатухающих, вынужденных поперечных колебаний многослойной балки с гармонической возбуждающей силой и частотой возбуждающего контуре ω . Так как интерес представляют только установившиеся (квазистационарные) колебания и действительным является только влияние возбуждающей силы, то и $w(x, t)$, и $\gamma(x, t)$ могут быть представлены в следующей форме:

$$w(x, t) = z_1(x) \sin \omega t; \quad \gamma(x, t) = z_2(x) \sin \omega t, \quad (2.139)$$

следовательно, w и γ имеют одинаковые по частоте и фазам колебания. Если выражения (2.138) и (2.139) подставить в дифференциальные уравнения (2.136) и (2.137), то последующим преобразованием можно исключить время t . При $N=0$ получаем обычные дифференциальные уравнения:

$$B_s(z_1'' - z_1''') - Az_2 = 0; \quad Az_2' - \mu \omega^2 z_1 = -q, \quad (2.140)$$

которые в расчлененной форме выглядят следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} z_1'' + \frac{\mu \omega^2}{A} z_1'' - \frac{\mu \omega^2}{B_s} z_1 &= \frac{q}{B_s} - \frac{q''}{A}; \\ z_2'' + \frac{\mu \omega^2}{A} z_2'' - \frac{\mu \omega^2}{B_s} z_2 &= -\frac{q''}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (2.141)$$

Отсюда вытекают зависимости между постоянными интегрирования в z_1 и z_2 . Все последующие уравнения для определения постоянных интегрирования получают из граничных условий многослойной балки.

В определенных случаях при вынужденных колебаниях многослойной балки необходимо учитывать и сопротивление системы колебаниям,

^{*} μ — масса балки на единицу длины.

особенно тогда, когда частота ω вынужденных колебаний близка одной из собственных частот ω_j многослойной балки, так как в этом случае амплитуды колебаний всех параметров состояния балки (w, τ, M, Q) существенно зависят от величины амплитуды затухания. При этом исходят из предположения, что энергия колебаний гасится преимущественно средним слоем за счет внутреннего трения при периодических деформациях его при сдвиге $\tau_k(x, t)$. Напротив, в металлических внешних слоях затухание едва возникает. Так как данная теория многослойных конструкций учитывает лишь напряжения деформации сдвига среднего слоя, а не продольные деформации, то здесь рассматривается чистое затухание сдвига. Его можно вычислить идеализированием элемента среднего слоя через элемент Кельвина, согласно рис. 16а, с параллельно подключенными пружинным и гасительным звеньями. Предположив в последнем пропорциональную зависимость между скоростью сдвига и силой затухания, получим для сдвигающих напряжений в среднем слое при $\tau_k = a\tau/h$, согласно уравнению (2.4), следующее выражение:

$$\tau = G(\tau_k + \delta_k \frac{d\tau_k}{dt}) = \frac{a}{h} G(\tau + \delta_k \frac{d\tau}{dt}). \quad (2.142)$$

Итак, величина τ , согласно уравнению (2.142), складывается из компонентов упругости и затухания. При составлении отношений "сдвигающее усилие — деформация" вместо уравнения (2.10) необходимо использовать уравнение (2.142). Тогда аналогично (2.22) получим:

$$M = B_s(\tau' - w''); \quad Q = A(\tau + \delta_k \frac{d\tau}{dt}). \quad (2.143)$$

Тогда дифференциальные уравнения для w и τ с учетом отрицательной силы инерции получаются (так же как и в п. 2.1.2) путем подстановки уравнения (2.143) в условия равновесия (2.24). В результате получим:

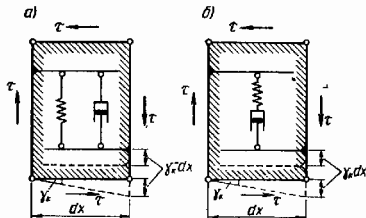
$$\left. \begin{aligned} B_s(\tau'' - w''') - A(\tau + \delta_k \frac{d\tau}{dt}) &= 0; \\ A(\tau' + \delta_k \frac{d\tau'}{dt}) + Nw'' - \mu \frac{d^2 w}{dt^2} &= -q. \end{aligned} \right\} \quad (2.144)$$

Уравнения (2.144) соответствуют уравнениям (2.25) для статического случая, а отношения (2.136) — для случая незатухающих вынужденных колебаний. Расчленение уравнений (2.144) возможно, но здесь не приводится.

В противоположность незатухающим колебаниям при затухающих, вынужденных колебаниях гармонично колеблющиеся смещения $w(x, t)$ и $\tau(x, t)$ устанавливаются к гармоничной возбуждающей силе $q(x, t)$ не синфазно. Вместо вещественных выражений (2.138) и (2.139) для расчета установившегося состояния колебаний пригодны комплексные выражения:

$$q(x, t) = q(x) e^{i\omega t}; \quad w(x, t) = z_1(x) e^{i\omega t}; \quad \tau(x, t) = z_2(x) e^{i\omega t}, \quad (2.145)$$

Рис. 16. Зависимость напряжения от деформации (физические законы) в среднем слое
 а — элемент Кельвина;
 б — элемент Максвелла



где $\tilde{z}_1(x)$ и $\tilde{z}_2(x)$ — комплексные функции вещественных переменных x . Подстановка (2.145) в частные дифференциальные уравнения (2.144), приравнивание коэффициентов в $e^{i\omega t}$ и расчленение получаемых при этом новых дифференциальных уравнений дают для $\tilde{z}_1(x)$ и $\tilde{z}_2(x)$ два обычных дифференциальных уравнения, которые формально с точностью до одного члена совпадают с уравнениями (2.144) для незатухающих колебаний. Тогда прочность среднего слоя на сдвиг с учетом уравнения (2.17)

$$U = A(1 + i h_K) = \frac{b a^{\frac{3}{2}}}{h} G(1 + i h_K), \quad (2.146)$$

где $h_K = \omega \delta_K$ — так называемый коэффициент потерь. Тем самым дальнейший расчет можно производить соответственно случаю без затухания.

Если при квазистационарных колебаниях учесть и затухание колебаний во внешних слоях, то в дифференциальных уравнениях (2.141) жесткость на изгиб B_s необходимо заменить полной жесткостью на изгиб $R = B_s(1 + i h_D)$. Если еще добавить и внешнее затухание при трении, пропорциональное скорости, то массу балки μ на единицу длины необходимо заменить полной массой балки $m = \mu(1 + i h_a)$. Влияние h_D и h_a при многослойных балках в общем невелико по сравнению с влиянием h_K .

Если принять во внимание только затухание сдвига многослойной балки и исследовать влияние коэффициента потерь h_K , то в предельном случае при $h_K = 0$ балка колеблется незатухающе. Следовательно, если возбуждающая частота ω , например, равна первой собственной частоте ω_0 многослойной балки (резонансный случай), то в установившемся режиме получаются "бесконечно большие" амплитуды колебаний. В другом предельном случае, когда $h_K = \infty$, затухание в среднем слое настолько велико, что больше вообще не может возникнуть деформация при сдвиге среднего слоя, так что и в данном случае не поглощается никакой энергии колебаний; следовательно, многослойная балка колеблется также незатухающе. Если ω_{100} есть первая собственная частота многослойной балки при предположении бесконечно большой жесткости на сдвиг ($A = \infty$), то для $\omega = \omega_{100}$ в установившемся режиме возникают "бесконечно большие" амплитуды колебаний, причем $\omega_{100} > \omega_0$. Для каждого коэффициента потерь h_K , находящегося между нулем и бесконечностью, многослойная балка колеблется затухающе; следовательно, амплитуды колебаний в установившемся режиме остаются здесь постоянно конечными даже тогда, когда возбуждающая частота

ω совпадает с первой собственной круговой частотой ω_{jK} , относящейся к заданному коэффициенту потерь h_K .

Свободные колебания. Если в уравнение (2.137) подставить $q=0$, то получим дифференциальные уравнения для незатухающих, свободных, поперечных колебаний многослойной балки. Если выражения:

$$w(x, t) = z_j(x) \sin \omega_j t; \quad \gamma(x, t) = z_2(x) \sin \omega_j t \quad (2.147)$$

ввести в эти частные дифференциальные уравнения, причем ω_j ($j = 1, 2, \dots$) означает собственную частоту многослойной балки, которую еще необходимо определить, то для случая, когда $N=0$ [аналогично уравнению (2.141)], получим:

$$\left. \begin{aligned} z_1'' + \frac{\mu \omega_j^2}{A} z_1'' - \frac{\mu \omega_j^2}{B_3} z_1 &= 0; \\ z_2'' + \frac{\mu \omega_j^2}{A} z_2'' - \frac{\mu \omega_j^2}{B_3} z_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.148)$$

Что касается расчета постоянных интегрирования в решениях z_1 и z_2 дифференциальных уравнений (2.148), то имеет место то же самое, что и в случае вынужденных колебаний. Уравнение для расчета собственной частоты ω_j получается путем приравнивания к нулю коэффициента определителя однородной системы линейных уравнений, составленных из граничных условий для расчета постоянных интегрирования.

Принцип Гамильтона. Интеграл Гамильтона соответствует принципу минимума потенциальной энергии, релаксированному на динамические процессы, и имеет вид

$$H = \int_{t_1}^{t_2} (\Pi - E) dt = \text{экстремум}, \quad (2.149)$$

где Π — потенциальная энергия системы (см. формулу 2.100), E — кинетическая энергия.

Из всех возможных, согласуемых с условиями опирания и совместности многослойной балки колебаний перемещения $w(t) + \delta w(t)$, $\gamma(t) + \delta \gamma(t)$ представляют собой те колебания $w(t)$, $\gamma(t)$, которые за интеграл времени $t_2 - t_1$ переводят функционал Π в экстремум. При $E=0$ получается отношение (2.101), т.е. уже известный принцип Π -экстремум.

Далее введем следующие упрощения, ограничив свободные колебания, т.е. $q(x, t) = 0$, приняв продольную силу $N=0$ и ограничив в системе число упругих опор.

Потенциальная энергия Π определяется согласно уравнению (2.100) с учетом уравнений (2.94) или (2.95), $\Pi=W$, в то время как кинетическая энергия E принимает форму

$$E = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{m}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2, \quad (2.150)$$

где $w_0 = w(x_0, t)$. Если уравнения (2.94) и (2.150) подставить в H [см. (2.149)] и составить уравнения, используя вариационный принцип Эйлера, то получатся два связанных дифференциальных уравнения для w и γ , которые после незначительных преобразований совпадают с уже известными динамическими основными уравнениями (2.136) для $N=0$ и $q=0$. Итак, принцип Гамильтона, как

и следовало ожидать, дает те же самые результаты, что и условия равновесия с учетом сил инерции. Кинетическая энергия сосредоточенной массы не вносит в данные дифференциальные уравнения дополнительных членов, так как частные производные, имеющиеся в уравнениях Эйлера, можно выполнить только по $\partial w / \partial t$, а не по $\partial w_0 / \partial t$. Сосредоточенная масса m в $x = x_0$ учитывается лишь через промежуточные условия в $x = x_0$ (см. п. 2.4.2).

Для свободных, незатухающих колебаний многослойной балки с одной из собственных частот ω_j ($j = 1, 2, \dots$) перемещения $w(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ могут быть снова выражены в форме (2.147); тогда, используя отдельные прогибы w_M и w_Q , справедливым будут следующие выражения:

$$w_M(x, t) = z_M(x) \sin \omega_j t, \quad w_Q(x, t) = z_Q(x) \sin \omega_j t. \quad (2.151)$$

Уравнения (2.147) и (2.151) подставляют в выражения для определения потенциальной энергии $\Pi = W$ и кинетической энергии E , а также в H согласно уравнению (2.149). Если затем проинтегрировать уравнение (2.149) по периоду колебаний (т.е. от t_1 до $t_2 = t_1 + 2\pi/\omega_j$) и учесть, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \sin^2 \omega_j t dt = \int_{t_1}^{t_2} \cos^2 \omega_j t dt = \frac{\pi}{\omega_j},$$

тогда в уравнении (2.149) время t исключаем и имеем

$$H^* = W^* - \omega_j^2 E^* = \text{экстремум}. \quad (2.152)$$

При этом для энергии деформации W^* справедливо выражение

$$W^* = \frac{1}{2} \int_{(l)} B_s (z_2' - z_1'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_{(l)} A z_2^2 dx \quad (2.153)$$

соответственно

$$W^* = \frac{1}{2} \int_{(l)} B_s z_M'^2 dx + \frac{1}{2} \int_{(l)} A z_Q'^2 dx, \quad (2.154)$$

а для кинетической энергии E^*

$$E^* = \frac{1}{2} \int_{(l)} \mu z_1^2 dx + \frac{m}{2} z_{10}^2 \quad (2.155)$$

соответственно

$$E^* = \frac{1}{2} \int_{(l)} \mu (z_M + z_Q)^2 dx + \frac{m}{2} (z_{M0} + z_{Q0})^2 \quad (2.156)$$

при

$$z_{10} = z_1(x_0), \quad z_{M0} = z_M(x_0) \quad \text{и} \quad z_{Q0} = z_Q(x_0).$$

Определение первой собственной частоты колебаний с помощью метода Ритца. Вариационная задача (2.152) может быть использована для приблизительного определения первой собственной частоты ω_1 многослойной балки, поскольку для функций z_1 и z_2 и соответственно z_M и z_Q согласно Методу Ритца [см. п. 2.3.2, формулу (2.148)], требуется лишь выполнение граничных условий. Относительно выбора этих функций сравнения, а также минимизации H^* рассмотрим два варианта.

*Знак "+" или "-" в зависимости от того, отклоняется собственная функция вниз или вверх.

1. Статические деформации в качестве функций сравнения. Деформации w_{st} и $\tau_{st}(x)$ соответственно $w_{Mst}(x)$ и $w_{Qst}(x)$ данной многослойной балки для чисто статической нагрузки* $q = \pm \mu g$ и $G = \pm mg$ а $x = x_0$ (g — ускорение свободного падения)

в большинстве случаев можно легко рассчитать и они известны. Если предположить, что линии прогибов многослойной балки в динамическом и статическом случаях являются подобными одна другой, то можно записать следующие выражения:

$$z_1(x) = \alpha_1 w_{st}(x); \quad z_2(x) = \alpha_1 \tau_{st}(x) \quad (2.157)$$

и соответственно:

$$z_M(x) = \alpha_1 w_{Mst}(x); \quad z_{Qst}(x) = \alpha_1 w_{Qst}(x). \quad (2.158)$$

Если уравнения (2.157) и (2.158) подставить в уравнения (2.153) — (2.156) и обозначить выражения энергии H^* и E^* для $\alpha_1 = 1$ как W_{st} и E_{st} , то следует, что

$$H^* = \alpha_1^2 (W_{st} - \omega_1^2 E_{st}) = \text{экстремум}.$$

Если минимизировать H^* относительно α_1 , то из этого следует, что $2\alpha_1 (W_{st} - \omega_1^2 E_{st}) = 0$, откуда вследствие $\alpha_1 \neq 0$ сразу получаем

$$\omega_1^2 = \frac{W_{st}}{E_{st}}. \quad (2.159)$$

Уравнение (2.159) показывает применение метода Релея для определения частоты собственных колебаний ω_1 через статическое перемещение балки.

Расчет энергии деформации многослойной балки W_{st} при чисто статической нагрузке посредством q и G в точке $x = x_0$ при известных условиях может быть значительно упрощен. Вместо расчета W_{st} с помощью работы внутренних сил, как в уравнении (2.153) или (2.154), W_{st} можно также рассчитать посредством работы внешних сил:

$$W_{st} = \frac{1}{2} \int_0^l q w_{st} dx + \frac{1}{2} G w_{st}(x_0). \quad (2.160)$$

Как показывает следующий особый случай, решение уравнения (2.160), как правило, осуществляется быстрее, чем уравнения (2.153) или (2.154).

Если сосредоточенная масса m значительно превышает общую массу балки μl , то достаточно учесть статическое перемещение балки под воздействием сосредоточенной силы G в точке $x = x_0$, т.е. без влияния q ; поэтому в W_{st} согласно уравнению (2.160) исключается первый член. Обозначим показатель упругости системы с многослойной балки в точке $x = x_0$ выражением

$$c = \frac{G}{w_{st}(x_0)}, \quad (2.161)$$

тогда W_{st} в упрощенной форме имеет вид

$$W_{st} = \frac{1}{2} c w_{st}^2(x_0). \quad (2.162)$$

Подстановка $z_1 = w_{st}$ в уравнение (2.155), а также уравнения (2.155) и (2.162) в уравнении (2.159) дает

$$\omega_i^2 = \frac{c}{m + \int_{(t)} \mu \left[\frac{w_{st}(x)}{w_{st}(x_0)} \right]^2 dx} \quad (2.163)$$

2. Произвольно выбранные функции в качестве функций сравнения. В некоторых случаях, например при переменном поперечном сечении многослойной балки, сложных условиях ее опирания или при наличии многих сосредоточенных сил на ней, расчет статических смещений $w_{st}(x)$ и $T_{st}(x)$ многослойной балки довольно затруднителен. Тогда для собственных функций z_1 и z_2 , а также z_M и z_Q вместо уравнений (2.157) и (2.158) можно также выбирать любые одночленные функции сравнений примерно такого вида, как выражения (2.106) и (2.107) для $j = 1$. Для того чтобы число свободных постоянных поддерживать как можно более меньшим, целесообразно выбрать z_1 и z_2 таким образом, чтобы они выполняли одно из двух дифференциальных уравнений (2.140) аналогично примеру, данному в п. 2.3.3. Эти функции сравнений можно теперь подставить в W^* и E^* согласно уравнениям (2.153)–(2.156), причем H^* согласно (2.152), может быть затем минимизировано по свободным постоянным. Уравнение собственных значений для расчета первой собственной частоты ω_1 получают путем приравнивания к нулю определителя коэффициента линейной однородной системы уравнений, составленной для определения свободных постоянных величин. Особый случай, когда в двух функциях сравнения z_1 и z_2 вместе содержится только одна свободная постоянная величина, снова дает частное Релея $\omega_1^2 = W^*/E^*$ [см. (2.159)].

Только что описанным способом могут быть рассчитаны в основном и более высокие собственные частоты ω_j ($j=1, 2, \dots$), когда для z_1 и z_2 вместо одночленных функций выбирают многочленные. Качество приближений для более высоких собственных частот ω_j в большинстве случаев посредственное; более точные исследования здесь не проводятся.

Многослойная балка с двусторонним шарнирным опиранием и сосредоточенной нагрузкой в середине пролета. А. Определение собственной частоты колебаний с помощью точного уравнения.

Для вывода уравнения собственных колебаний многослойной балки, представленной на рис. 17 исходим из дифференциальных уравнений (2.14В). С учетом переменной $\xi = x/l$, а также с обозначением

$$\lambda^4 = \frac{\mu \omega_j^2 l^4}{B_s}, \quad \nu^2 = \frac{\mu \omega_j^2 l^2}{A} \quad (2.164)$$

дифференциальные уравнения (2.14В) приобретают вид:

$$z_1^{IV} - \nu^2 z_1'' - \lambda^4 z_1 = 0; \quad z_2^{IV} + \nu^2 z_2'' - \lambda^4 z_2 = 0. \quad (2.165)$$

При

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\nu^4 + 4\lambda^4} + \nu^2)}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\nu^4 + 4\lambda^4} - \nu^2)} \quad (2.166)$$

общие решения уравнений (2.165) имеют вид:

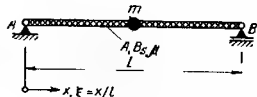


Рис. 17. Многослойная балка с двусторонним шарнирным опиранием и сосредоточенной нагрузкой в середине пролета

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= C_1 \cos \alpha_1 \xi + C_2 \sin \alpha_1 \xi + C_3 \cosh \alpha_2 \xi + C_4 \sinh \alpha_2 \xi; \\ z_2 &= D_1 \cos \alpha_1 \xi + D_2 \sin \alpha_1 \xi + D_3 \cosh \alpha_2 \xi + D_4 \sinh \alpha_2 \xi. \end{aligned} \right\} \quad (2.167)$$

Подстановкой уравнений (2.167) в одно из двух отношений (2.140) для $q = 0$ и $\omega = \omega_j$ между логотипными интегрирования в z_1 и z_2 получаются следующие зависимости:

$$D_1 = \frac{v^2}{\alpha_1 l} C_2; \quad D_2 = -\frac{v^2}{\alpha_1 l} C_1; \quad D_3 = -\frac{v^2}{\alpha_2 l} C_4; \quad D_4 = -\frac{v^2}{\alpha_2 l} C_3,$$

в результате чего z_2 принимает форму

$$z_2 = \frac{v^2}{\alpha_1 l} (C_2 \cos \alpha_1 \xi - C_1 \sin \alpha_1 \xi) - \frac{v^2}{\alpha_2 l} (C_4 \cosh \alpha_2 \xi + C_3 \sinh \alpha_2 \xi). \quad (2.168)$$

Остальные четыре постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 и C_4 определяют из граничных и промежуточных условий. Если ограничиться колебаниями, симметричными к середине пролета, то для левой опоры ($\xi = 0$) справедливы граничные условия $w(0, t) = 0$ и $M(0, t) = 0$ соответственно с уравнениями (2.147) и (2.22):

$$z_1(0) = 0; \quad z_2'(0) - \frac{1}{l} z_1''(0) = 0, \quad (2.169)$$

а также в середине пролета ($\xi = 1/2$) справедливы условия перехода $z_2(1/2, t) = 0$ и $Q(1/2, t) = -1/2 m \partial^2 w / \partial t^2 (1/2, t)$ соответственно с (2.147) и (2.22):

$$z_2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{l} z_1'\left(\frac{1}{2}\right) = 0; \quad z_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{v^2 \alpha}{2l} z_1\left(\frac{1}{2}\right), \quad (2.170)$$

где $\alpha = m/\mu l$ — соотношение сосредоточенной массы и массы балки. Отношения (2.169) непосредственно дают $C_1 = 0, C_3 = 0$, в то время как отношения (2.170), принимая во внимание уравнение (2.166), дают следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \cos \frac{\alpha_1}{2} C_2 + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2} \cosh \frac{\alpha_2}{2} C_4 &= 0; \\ \left(\frac{1}{\alpha_1} \cos \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha_1}{2}\right) C_2 - \left(\frac{1}{\alpha_2} \cosh \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{\alpha_2}{2}\right) C_4 &= 0. \end{aligned}$$

Приравняв к нулю определитель знаменателя получаем уравнение собственных колебаний многослойной балки

$$\alpha_1^3 \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} - \alpha_2^3 \operatorname{tgh} \frac{\alpha_2}{2} = \frac{2}{\alpha} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2). \quad (2.171)$$

Искомые собственные частоты колебаний ω_j ($j = 1, 2, \dots$) многослойной балки, согласно уравнению (2.166), неявно содержатся в значениях α_1 и α_2 . Их зависимость от различных значений $x = m/\mu l$ может быть найдена в виде численных значений из трансцендентного уравнения (2.171).

Для двух особых случаев из уравнения (2.171) должна быть соответственно определена первая собственная частота ω_1 .

$m = 0$ (сосредоточенная масса): $x = 0$, согласно уравнению (2.171), $\alpha_1 = x$, так что с учетом (2.166) и (2.164) посредством решения по ω_1^2 следует, что

$$\omega_1^2 = \frac{B_s}{\mu l^4} \frac{\pi^4}{1 + \pi^2 \beta} \quad (2.172)$$

при β согласно (2.47).

$\mu = 0$ (масса балки): $x \rightarrow \infty$, при этом λ , ν , α_1 и α_2 стремятся к нулю. С помощью разложений в ряд действительных для малых α_1 и α_2

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_1^3}{24} + \dots, \quad \operatorname{tgh} \frac{\alpha_2}{2} = \frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_2^3}{24} + \dots$$

подстановкой в уравнение (2.171) с учетом уравнения (2.166) получаем

$$\frac{\nu^2}{2} + \frac{\lambda^4}{24} = \frac{2}{x},$$

следовательно, с учетом (2.164) и при β , согласно (2.47), получим

$$\omega_1^2 = \frac{48 B_s}{(1 + 12\beta) l^3} \quad (2.173)$$

Это является известной формулой $\omega_1^2 = c/m$ колебания "пружина-масса" с постоянной упругостью:

$$c = \frac{P}{\omega_1} = \frac{48 B_s}{(1 + 12\beta) l^3} \quad (2.174)$$

многослойной балки, в середине пролета которой действует нагрузка, где ω_1 следует из уравнения (2.63) для $\varepsilon = 1/2$ и $\xi = 1/2$.

Б. Приближенное определение первой собственной частоты по методу Релея.

При условии, что сосредоточенная масса m четко превышает массу балки μl , можно исходить из отношения (2.163). Для c справедливо уравнение (2.174); соотношение $\omega_{st}(\xi) / \omega_{st}(1/2)$, согласно уравнению (2.63), где $\varepsilon = 1/2$, запишется

$$\frac{\omega_{st}(\xi)}{\omega_{st}(1/2)} = \frac{3\xi - 4\xi^2 + 24\beta\xi}{1 + 12\beta} \quad (2.175)$$

и действительно для $0 \leq \xi \leq 1/2$, а также для $1/2 \leq \xi \leq 1$. Подставив уравнения (2.174) и (2.175) в (2.163) и приведя ω_1^2 к форме

$$\omega_1^2 = \frac{c}{m + \alpha_1 \mu l} \quad (2.176)$$

$$\alpha_1 = \frac{17 + 336\beta + 1680\beta^2}{35(1+12\beta)^2}; \quad (2.177)$$

α_1 показывает, какую часть массы балки μl необходимо учитывать дополнительно к сосредоточенной массе m в выражении (2.176).

Рассмотрим два особых случая.

$A = \infty$ (чистые колебания при изгибе). $\beta = 0$, причем уравнения (2.174) и (2.177) дают $c = 48 B_s / l^3$, а $\alpha_1 = 17/35$. Если при этом $m = 0$, тогда уравнения (2.176) и (2.177) дают выражение

$$\omega_1 = \frac{9,941}{l^2} \sqrt{\frac{B_s}{\mu}}, \quad (2.178)$$

т.е. погрешность составляет лишь 0,7% по сравнению с точным значением следующим из уравнения (2.172):

$$\dot{\omega}_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{B_s}{\mu}} = \frac{9,869}{l^2} \sqrt{\frac{B_s}{\mu}}.$$

$B_s = \infty$ (чистые колебания при сдвиге). $\beta = \infty$, уравнения (2.174) и (2.177) дают значения $c = 4A/l$ и $\alpha_1 = 1/3$. Если при этом $m = 0$, т.е. случай, для которого уравнение (2.163) несправедливо, то получим

$$\omega_1 = \frac{3,464}{l} \sqrt{\frac{A}{\mu}}, \quad (2.179)$$

т.е. погрешность по сравнению с точным значением составляет 10,3%:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{A}{\mu}} = \frac{3,141}{l} \sqrt{\frac{A}{\mu}}.$$

2.4.3. Ползучесть среднего слоя. Дифференциальные уравнения.

В большинстве случаев средний слой многослойной балки выполняется из полимерных материалов, в то время как внешние слои, как правило, металлические. Полимерные материалы при длительном действии на них нагрузок обладают ползучестью, т.е. свойством постоянно увеличивать степень своей деформации дополнительно к начальной, упругой деформации при остающейся неизменной нагрузке в течении времени t . Металлы таким свойством не обладают. Поэтому в данном разделе рассматривается только ползучесть среднего слоя. Так как данная теория многослойных конструкций учитывает лишь напряжения и деформации среднего слоя при сдвиге, а не его линейные деформации вдоль оси x и нормальные напряжения, то речь пойдет только о "ползучести при сдвиге".

Ее можно вычислить арифметически, если рассматривать средний слой как идеальный элемент Максвелла, согласно рис. 16, б с последовательно включенными упругим пружинным элементом и элементом ползучести. Если в последнем предположить наличие пропорциональности между скоростью ползучести и нагрузкой, то физический закон для среднего слоя при $\tau_k = a\tau/h$, согласно (2.4), можно выразить в форме

$$\frac{d\tau}{dt} + \delta_0 \tau = G \frac{d\tau_k}{dt} = \frac{a}{h} G \frac{d\tau}{dt}. \quad (2.180)$$

Теперь вместо времени t в качестве новой переменной вводится модуль ползучести φ согласно $\varphi = \delta_0 t$ и соответственно

$$\varphi = \int_0^t \delta_0(t') dt'. \quad (2.181)$$

Первое соотношение справедливо для постоянной δ_0 , а второе — для δ_0 , изменяющийся во времени t при возрастающем упрочнении материала. Например, для пенополиуретана $\delta_0 = \text{const}$, причем в зависимости от объемной массы пеноматериала для $t = 1$ год $\varphi = 3 \dots 5$. Для бетона, напротив, справедливо

$$\delta_0(t) = \alpha_0 \varphi_\infty e^{-\alpha_0 t}, \quad \varphi(t) = \varphi_\infty (1 - e^{-\alpha_0 t}),$$

где φ_∞ представляет собой модуль ползучести, достигнутый за бесконечно длительное время; в зависимости от качества бетона и времени первой нагрузки после отверждения он составляет $\varphi_\infty = 2 \dots 5$. При φ , согласно (2.181), из уравнения (2.180) следует более простое дифференциальное уравнение

$$\frac{d\tau}{d\varphi} + \tau = \frac{a}{h} G \frac{d\gamma}{d\varphi}, \quad (2.182)$$

которое необходимо решить для начального условия

$$\tau(0) = \frac{a}{h} G \tau(0). \quad (2.183)$$

Но сначала рассмотрим особый случай. Если сдвигающая нагрузка за время t является постоянной, т.е. $\tau = \tau_0$, тогда из уравнений (2.182) и (2.163) следует

$$\tau(\varphi) = (1 + \varphi) \frac{h\tau_0}{aG} = (1 + \varphi) \tau(0). \quad (2.184)$$

Уравнение (2.184) допускает наглядную интерпретацию модуля ползучести φ . Он дает то кратное начального, упругого угла сдвига $\tau(0)$, на который под воздействием постоянной длительной нагрузки по истечении времени $t = \varphi / \delta_0^*$ вследствие ползучести материала увеличивается $\tau(0)$.

Общее решение дифференциального уравнения (2.182) с учетом начального условия (2.183) по методу вариации постоянных имеет вид

$$\tau(\varphi) = \frac{a}{h} G \left[\tau(0) + \int_0^\varphi \frac{d\gamma}{d\psi} e^\psi d\psi \right] e^{-\varphi};$$

после интегрирования находим

$$\tau(\varphi) = \frac{a}{h} G \left[\tau(\varphi) - e^{-\varphi} \int_0^\varphi \tau(\psi) e^\psi d\psi \right]. \quad (2.185)$$

τ , согласно (2.185), состоит из компонентов упругости и ползучести. При составлении соотношений "сдвигающее усилие—деформация" вмес-

* Согласно уравнению (2.181), предполагается $\delta_0 = \text{const}$.

то уравнения (2.10) следует использовать уравнение (2.185). Аналогично (2.22) получаем:

$$M = B_s(\gamma' - w''); \quad Q = A(\gamma - e^{-\psi} \int_0^{\psi} \gamma e^{\psi} d\psi). \quad (2.186)$$

Тогда уравнения для w и γ получаются так же, как и в п. 2.1.2, подстановкой (2.186) в условия равновесия (2.24). В результате получаем:

$$\left. \begin{aligned} B_s(\gamma'' - w''') - A(\gamma - e^{-\psi} \int_0^{\psi} \gamma e^{\psi} d\psi) &= 0; \\ A(\gamma' - e^{-\psi} \int_0^{\psi} \gamma' e^{\psi} d\psi) + Nw'' &= -q. \end{aligned} \right\} \quad (2.187)$$

В случае соотношений (2.187) речь идет о дифференциальных уравнениях. Они соответствуют уравнениям (2.25) для случая непонизженного сердечника. Расщепление уравнений (2.187) возможно, но в данном случае оно не производится.

Если вместо w и γ , согласно уравнению (2.29), ввести отдельные прогибы w_M и w_Q , то вместо уравнения (2.186) получим:

$$M = -B_s w_M''; \quad Q = A(w_Q' - e^{-\psi} \int_0^{\psi} w_Q' e^{\psi} d\psi). \quad (2.188)$$

Если ради упрощения принять ограничение на $N = 0$, то после незначительных преобразований для (2.187) получаются следующие отношения:

$$\left. \begin{aligned} w_M'' &= +\frac{q}{B_s}; \\ w_Q'' - e^{-\psi} \int_0^{\psi} w_Q'' e^{\psi} d\psi &= -\frac{q}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (2.189)$$

Они соответствуют уравнениям (2.34). Расчет с помощью отдельных прогибов w_M и w_Q в общем удобнее, чем с помощью w и γ . Решение уравнений (2.188) и (2.189) рассматривается в двух следующих разделах.

Статически определяемая многослойная балка. При статически определяемой многослойной балке можно исходить из соотношений (2.188), так как здесь при заданной внешней нагрузке q усилия M и Q определяются только из условий равновесия и поэтому известны с самого начала. Перераспределение величин M и Q на другие части балки во время процесса ползучести невозможно в случае статически определенных многослойных балок. Если же перемещение задается по времени, т.е. с изменяющейся по ψ нагрузкой

$$q(x, \psi) = q_0(x) f(\psi), \quad f(0) = 1, \quad (2.190)$$

то для M и Q имеется такая же ψ -зависимость, как и для q :

$$M(x, \psi) = M_0(x) f(\psi); \quad Q(x, \psi) = Q_0(x) f(\psi); \quad (2.191)$$

здесь $q_0(x)$, $M_0(x)$ и $Q_0(x)$ из-за $f(0) = 1$ — значения в момент приложения нагрузки при $\psi = 0$.

Для того чтобы удовлетворить дифференциальному уравнению (2.188), для w_H и w_a выбираются следующие выражения:

$$w_H(x, \varphi) = w_{H_0}(x)f(\varphi); \quad w_a(x, \varphi) = w_{a_0}(x)u(\varphi). \quad (2.192)$$

Подстановка уравнений (2.191) и (2.192) в (2.188) дает следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} w_{H_0}'' &= -\frac{M_0}{B_s}; \\ w_{a_0}'(y - e^{-\varphi} \int_0^{\varphi} ye^{\varphi} d\varphi) &= \frac{Q_0}{A} f(\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (2.193)$$

Из второго уравнения (2.193) следует

$$\frac{w_{a_0}'}{Q_0/A} = \frac{f(\varphi)}{y - e^{-\varphi} \int_0^{\varphi} ye^{\varphi} d\varphi}.$$

Так как левая часть, согласно (2.191) и (2.192), представляет собой чистую функцию x , а правая — чистую функцию φ , то обе выражения могут быть только тогда равны одно другому, когда они равны постоянной величине C :

$$w_{a_0}' = C \frac{Q_0}{A}; \quad y - e^{-\varphi} \int_0^{\varphi} ye^{\varphi} d\varphi = \frac{1}{C} f(\varphi). \quad (2.194)$$

Отсюда следует, что $w_{a_0}C$ и $y \sim 1/C$, так что $w_a = w_{a_0}y$, согласно (2.192), снова независимо от C . Поэтому произвольно можно предположить, что $C = 1$. Тем самым из уравнений (2.193) и (2.194) вытекают следующие уравнения:

$$w_{H_0}'' = -\frac{M_0}{B_s}; \quad w_{a_0}' = \frac{Q_0}{A}; \quad y - e^{-\varphi} \int_0^{\varphi} ye^{\varphi} d\varphi = f(\varphi). \quad (2.195)$$

Два первых уравнения (2.195) идентичны дифференциальным уравнениям (2.35); в п. 2.2 они уже использовались во многих примерах. Третье уравнение (2.195) — интегральное, которое может быть преобразовано посредством умножения на e^{φ} , дифференцирования, а затем и умножения на $e^{-\varphi}$ может быть представлено дифференциальным уравнением вида

$$y' = f(\varphi) + f'(\varphi).$$

Решение его следующее:

$$y = f(\varphi) + \int f(\varphi) d\varphi + C_1. \quad (2.196)$$

Постоянная интегрирования C_1 может быть определена подстановкой уравнения (2.196) в интегральное уравнение (2.195), так что в результате получается выражение

$$y(\varphi) = f(\varphi) + \int_0^{\varphi} f(\varphi) d\varphi. \quad (2.197)$$

Приведем два примера.

$f(\varphi) = 1$ (постоянная длительная нагрузка): уравнение (2.197) дает

$$y = 1 + \varphi, \quad (2.198)$$

следовательно, имеет место совпадение с уравнением (2.184).
 $f(\varphi) = e^{-\alpha\varphi}$ (убывающая длительная нагрузка): уравнение (2.197)
 ДОУТ

$$y = \frac{1}{\alpha} [1 - (1 - \alpha) e^{-\alpha\varphi}]; \quad (2.199)$$

в предельном случае $\alpha = 0$ из уравнения (2.199) снова следует уравнение (2.198).

Зная $w_{M_0}(x)$, $w_{B_0}(x)$ и $y(\varphi)$, согласно уравнению (2.192), становятся известны и отдельные прогибы для всех значений x и φ . В особом случае $f(\varphi) = 1$ справедливо

$$w_M = w_{M_0}(x), \quad w_B = (1 + \varphi) w_{B_0}(x), \quad (2.200)$$

т.е. при постоянной длительной нагрузке вследствие ползучести среднего слоя увеличивается только w_B общего прогиба $w = w_M + w_B$, в то время как компонент изгиба w_M остается неизменным.

Статически неопределимая многослойная балка. При статически неопределимых многослойных балках усилия M и Q заранее неизвестны, поэтому следует исходить из отношений (2.189). Но если все-таки используется описанный в п. 2.2.3, основанный на принципе сложения метод сдвигающих усилий, при котором все расчеты производятся по статически неопределимой основной системе, то в этом случае исходим из отношений (2.186), так как теперь M и Q могут быть рассчитаны только из условий равновесия. В качестве примера рассмотрим двухпролетную балку, как показано на рис. 10, на которую действует постоянная длительная нагрузка $q(x)$.

Нагрузка статически определимой однопролетной балки состоит из постоянной по времени распределенной нагрузки $q(x)$ и изменяющейся по времени, приложенной в точке B снизу вверх статически переменной величины

$$X(\varphi) = X_0 f(\varphi), \quad (2.201)$$

где X_0 — опорная реакция в точке B ($\varphi = 0$), а $f(\varphi)$ — еще неизвестная функция от φ .

Общий прогиб многослойной балки в точке B к какому-либо моменту φ при $\varepsilon = e/t$ составит

$$w(\varepsilon, \varphi) = [w_{M_2}(\varepsilon) + (1 + \varphi) w_{B_2}(\varepsilon)] - X_0 [w_{M_1}(\varepsilon) f(\varphi) + w_{B_1}(\varepsilon) y(\varphi)], \quad (2.202)$$

где, согласно уравнению (2.62), для $P=1$, $\xi = \xi$ и $\beta = B_s / At^2$:

$$w_2(\varepsilon) = w_{M_1}(\varepsilon) + w_{B_1}(\varepsilon); \quad w_{M_1}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 (1 - \varepsilon)^2 t^3}{3 B_s}; \quad w_{B_1}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon (1 - \varepsilon) \beta t^3}{B_s}. \quad (2.203)$$

В уравнении (2.202) первое выражение в скобках представляет собой, согласно уравнению (2.200), прогиб в точке B вследствие постоянной длительной нагрузки $q(x)$, а X_0 — второе выражение в скобках, согласно (2.192), представляет собой прогиб в точке B вследствие изменяющейся по времени силы $X(\varphi) = X_0 f(\varphi)$, причем $y(\varphi)$ определен

с помощью уравнения (2.197). Так как у статически неопределимой системы в точке B неходится опора, то для любого момента φ справедливо условие $w(\varepsilon, \varphi) = 0$, откуда получается интегральное уравнение для еще неизвестной функции $f(\varphi)$:

$$w_{M_2}(\varepsilon) + (1 + \varphi)w_{Q_2}(\varepsilon) - X_0 w_{M_1}(\varepsilon) f(\varphi) - X_0 w_{Q_1}(\varepsilon) \left[f(\varphi) + \int_0^\varphi f(\psi) d\psi \right] = 0. \quad (2.204)$$

Дифференцированием и незначительным преобразованием из уравнения (2.204) получаем дифференциальное уравнение

$$f'(\varphi) + \frac{w_{Q_1}(\varepsilon)}{w_{M_1}(\varepsilon)} f(\varphi) = \frac{w_{Q_2}(\varepsilon)}{w_{M_1}(\varepsilon) X_0}. \quad (2.205)$$

Если общее решение этого дифференциального уравнения и определение постоянной интегрирования достигается подстановкой в интегральное уравнение (2.204), то с учетом безразмерных величин

$$\alpha_1 = \frac{w_{Q_2}(\varepsilon)}{w_{M_1}(\varepsilon) X_0}, \quad \alpha_2 = \frac{w_{Q_1}(\varepsilon)}{w_{M_1}(\varepsilon)} \quad (2.206)$$

после некоторого расчета следует

$$f(\varphi) = \alpha_1 + (1 - \alpha_1) e^{-\alpha_2 \varphi}. \quad (2.207)$$

Уравнение (2.207) определяет нагрузку на балку к любому моменту φ , так что усилия M и Q статически неопределимой системы, согласно рис. 10, могут быть рассчитаны простым способом через наложение нагрузок $q(x)$ и $X(\varphi) = X_0 f(\varphi)$.

П р и м е р. Постоянная распределенная нагрузка q_0 , одинаковая длина пролетов ($\varepsilon = 1/2$). Согласно уравнениям (2.59), (2.203) и (2.88), получим:

$$\left. \begin{aligned} w_{M_2}(\varepsilon) &= \frac{5}{384} \frac{q_0 l^4}{B_s}; & w_{Q_2}(\varepsilon) &= \frac{\beta}{8} \frac{q_0 l^4}{B_s}; \\ w_{M_1}(\varepsilon) &= \frac{5+48\beta}{384} \frac{q_0 l^4}{B_s}; & w_{Q_1}(\varepsilon) &= \frac{1}{48} \frac{l^3}{B_s}; \\ w_{Q_2}(\varepsilon) &= \frac{\beta}{4} \frac{l^3}{B_s}; & w_{M_1}(\varepsilon) &= \frac{1+12\beta}{48} \frac{l^3}{B_s}; \\ X_0 &= \frac{5+48\beta}{1+12} \frac{q_0 l}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (2.208)$$

(2.206) – (2.206) дают следующие выражения:

$$\alpha_1 = \frac{1+48\beta}{5+48\beta}; \quad \alpha_2 = \frac{12\beta}{1+12\beta}, \quad (2.209)$$

в результате чего, согласно (2.207), известна также величина $f(\varphi)$. Величины M и Q тем самым имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} M(\xi, \varphi) &= \frac{q_0 l^2}{4} \xi \left[1 - 2\xi - \frac{e^{-\alpha_2 \varphi}}{4(1+12\beta)} \right]; \\ Q(\xi, \varphi) &= \frac{q_0 l}{4} \left[1 - 4\xi - \frac{e^{-\alpha_2 \varphi}}{4(1+12\beta)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.210)$$

Эти выражения справедливы для $0 \leq \xi \leq 1/2$ и для $1/2 \leq \xi \leq 1$.

Рассмотрим четыре предельных случая.

$\varphi = 0$: (2.210) специально для $\xi = 1/2$ дает известные значения M_s и $Q_{1/2}$ согласно (2.92).

$\varphi = \infty$: уравнение (2.210) дает значения:

$$M = \frac{q_0 l^2}{4} \xi (1 - 2\xi); \quad Q = \frac{q_0 l}{4} (1 - 4\xi); \quad (2.211)$$

$$A = \infty: \quad \beta = 0, \quad \alpha_1 = 4/5, \quad \alpha_2 = 0, \quad f(\varphi) = 1, \quad \text{а}$$

$$M = \frac{q_0 l^2}{16} (3 - 8\xi), \quad Q = \frac{q_0 l}{16} (3 - 16\xi). \quad (2.212)$$

Вследствие независимости от φ перераспределения сдвигающих усилий не возникает, что очевидно в результате бесконечно большой жесткости на сдвиг A .

$$B_s = \infty: \quad \beta = \infty, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1 \quad \text{и} \quad f(\varphi) = 1;$$

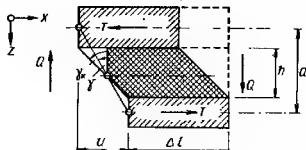
M и Q идентичны значениям предельного случая $\varphi = \infty$. И здесь не наблюдается перераспределения сдвигающих усилий.

При всех значениях поперечных сечений, находящихся между предельными случаями $A = \infty$ и $B_s = \infty$, все-таки возникают перераспределения усилий M и Q таким образом, что величина опорного изгибающего момента в точке B снижается вследствие ползучести, а величина момента в пролете увеличивается. Поэтому в результате ползучести изменяется и компонент прогиба от момента, а не только от сдвига w_Q . Статически неопределимые многослойные бепки во время процесса ползучести ведут себя иначе, чем статически опраделенные балки.

2.5. ДОПОЛНЕНИЯ

2.5.1. Жесткость на сдвиг при конструктивно неоднородном среднем слое. В п. 2.1.1 указывалось, что многослойные балки имеют однородный средний слой. У многих типов многослойных конструкций это не так (см. табл. 1.1 "Геометрическая характеристика поперечного сечения среднего слоя"). Теория многослойных конструкций, развитая в предыдущих разделах, должна быть дополнена материалом о многослойных балках с конструктивно неоднородным средним слоем. Рассмотрим этот случай.

Рис. 18. Элемент многослойной балки, деформированный при сдвиге



Элемент многослойной балки длиной Δl подвергается чистой нагрузке на сдвиг, которая состоит из горизонтальных усилий сдвига T , действующих по оси центра тяжести во внешних слоях, и вертикальных поперечных усилий Q (рис. 18). Рассчитывается соответствующее смещение верхнего покровного слоя относительно нижнего. Между T и u получаем соотношение

$$T = cu, \quad (2.213)$$

где c — показатель, зависящий от геометрической структуры среднего слоя. Если в уравнение (2.213) подставить $u = a\gamma$, а также отношение $T = Q\Delta l/a$, следующее из условия равновесия моментов, и решить согласно Q , то получим

$$Q = A\gamma, \quad A = \frac{c a^2}{\Delta l}. \quad (2.214)$$

Согласно (2.214), A — жесткость на сдвиг данного конструктивного неоднородного среднего слоя. Зная эту величину, можно известным способом произвести все расчеты многослойной балки. Приведем два примера к уравнению (2.214).

Однородный средний слой.

Согласно уравнению (2.9), для среднего слоя справедливо выражение $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{xy}$; если сюда подставить $\tau_{xz} = T/b\Delta l$ и $\gamma_{xy} = u/h$ решить согласно T , то получим:

$$T = cu; \quad c = \frac{G b \Delta l}{h}.$$

Подстановкой c в уравнение (2.214) получим

$$A = G \frac{b a^2}{h},$$

т.е. уже известное отношение (2.17).

Средний слой ячеистой структуры (конструктивно неоднородный).

Толщина стенок l , сотовообразного среднего слоя высотой h в общем настолько мала, что при относительном смещении u между верхним и нижним внешними слоями многослойной балки принимается во внимание только жесткость на сдвиг стенок сот в их плоскости, а не жесткость этих стенок на изгиб перпендикулярно их плоскости. Следовательно, при расчете деформаций стенки ячейки при сдвиге от общего смещения берется только составляющая, параллельная стенке ячейки.

И с л у ч а й. Жесткость ячеек на сдвиг A_{xz} в продольном направлении. Если ячейке сообщить деформацию при сдвиге u в продольном на-

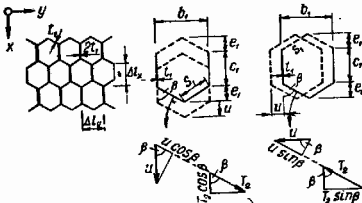


Рис. 19. Средний слой в форме сот: деформации при сдвиге ячейки в продольном и поперечном направлении

правлении (рис. 19), то для стенок ячейки, параллельных направлению смещения u , справедливы выражения:

$$\tau_1 = G\gamma_{k1} = G \frac{u}{h}, \quad T_1 = \tau_1 t_1 c_1, \quad (2.215)$$

а в стенках ячеек, наклоненных под углом β ,

$$\tau_2 = G\gamma_{k2} = G \frac{u \cos \beta}{h}, \quad T_2 = \tau_2 t_2 s_1. \quad (2.216)$$

Если в ячейке рассматривать только область, приходящуюся на $\Delta l_x = c_1 + e_1$, т.е. вынесенные отдельно на рис. 19 четыре стенки ячеек¹, то для равнодействующей, параллельной сдвигающему усилию u , получается $T = 2T_1 + 2T_2 \cos \alpha$. Следовательно, после подстановки вышеуказанных соотношений для T_1 и T_2 , а также при $\cos \beta = e_1/s_1$,

$$T = cu, \quad c = G \frac{2t_1(c_1 + \frac{e_1^2}{s_1})}{h}. \quad (2.217)$$

Подстановка c , согласно уравнению (2.217), а также $\Delta l_x = c_1 + e_1$ в уравнение (2.214) дает выражение показателя жесткости при сдвиге ячейки в продольном направлении:

$$A_{xz1} = G \frac{2t_1(c_1 + e_1^2/s_1)a^2}{h(c_1 + e_1)}.$$

На многослойную балку шириной b приходится $n = b/b_1$ ячеек, так что для ряда ячеек шириной b в продольном направлении жесткость на сдвиг получается:

$$A_{xz} = G_{xz} \frac{ba^2}{h}; \quad G_{xz} = G \frac{2t_1(c_1 + e_1^2/s_1)}{b_1(c_1 + e_1)}, \quad (2.218)$$

где G_{xz} — идеальный модуль сдвига среднего слоя в продольном направлении ячейки, представляющий собой [см. уравнение (2.17)] тот модуль сдвига, который должен был бы иметь однородный средний слой, чтобы обладать той же жесткостью на сдвиг, что и сотовообразный средний слой. Предельный случай $\beta = 0$, т.е. $s_1 = e_1$ и $b_1 = 2t_1$, дает $G_{xz} = G$, следовательно, модуль сдвига однородного сплошного среднего слоя.

¹Обозначенные на рис. 19 пунктиром обе стенки ячеек статически относятся уже к ячейкам другого ряда.

Напряжения сдвига в стенках ячеек после вычисления поперечного усилия Q (подобно тому, как показано в п. 2.1.5) с учетом уравнений (2.215) и (2.216), а также при $u/h = \tau_k = \alpha \tau / h$ согласно (2.4) и $\tau = Q/A_{xz}$ согласно (2.22) и (2.218) определяются следующими выражениями:

$$\tau_1 = \frac{G}{G_{xz}} \frac{Q}{ab}; \quad \tau_2 = \frac{G}{G_{xz}} \frac{Q}{ab} \cos \beta. \quad (2.219)$$

П л у ч а й. Жесткость на сдвиг A_{yz} ячеек в поперечном направлении. Расчет A_{yz} происходит аналогично расчету A_{xz} . В данном случае обе продольные стенки ячейки не способствуют жесткости на сдвиг ($\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$), в то время как для стенок ячеек, наклоненных под углом β , справедливы следующие выражения:

$$\tau_2 = G \tau_2 = G \frac{u \sin \beta}{h}; \quad T_2 = \tau_2 t_1 s_1. \quad (2.220)$$

Подстановка в $T = 2T_2 \sin \beta$ при $\sin \beta = b_1/2s_1$ дает следующие выражения:

$$T = cu; \quad c = G \frac{t_1 b_1^2}{2h_1 s_1}. \quad (2.221)$$

Подстановка c , согласно (2.221), и $\Delta t_y = b_1$ в уравнение (2.214) дает значение жесткости ячейки на сдвиг A_{yz} в поперечном направлении.

На многослойную балку шириной b приходится ячейки $n = b_1/(c_1 + e_1)$, так что для ряда ячеек шириной b получается следующая жесткость на сдвиг:

$$A_{yz} = G_{yz} \frac{ba^2}{h}; \quad G_{yz} = G \frac{t_1 b_1}{2s_1(c_1 + e_1)}. \quad (2.222)$$

Предельный случай $\beta = 90^\circ$ и $c_1 = 0$, т.е. $s_1 = b_1/2$ и $e_1 = t_1$, дает $G_{yz} = G$, т.е. модуль сдвига однородного среднего слоя. Для напряжений сдвига в стенках ячеек после подсчета поперечной силы получаем:

$$\tau_1 = 0; \quad \tau_2 = \frac{G}{G_{yz}} \frac{Q}{ab} \sin \beta. \quad (2.223)$$

2.5.2. Переменные значения поперечного сечения. Отношения (2.22) и (2.31) для M и Q справедливы также при переменных значениях поперечного сечения $B_s(x)$ и $A(x)$. Ряди упрощения предполагается, что продольное усилие не действует ($N=0$) и балка статически определима, т.е. M и Q известны заранее¹. Для w и τ вместо уравнения (2.28) получаются отношения:

$$w'' = -\frac{M}{B_s} + \left(\frac{Q}{A}\right)'; \quad \tau = \frac{Q}{A}, \quad (2.224)$$

в то время как для w_M и w_Q справедливы в неизменном виде отноше-

¹Если имеет место статически определимое опирание, то применяется метод сдвигающих усилий, описанный в п. 2.2.3, при котором все расчеты сводятся к заменяемой, статически определенной основной системе.

ния (2.35). Для решения этих дифференциальных уравнений рассмотрим несколько методов.

Точное решение.

Несмотря на переменность B_s и A , попытаемся точно решить уравнения (2.224) и (2.35). Если, например, толщина внешних слоев постоянна и расстояние между ними линейно-переменно вдоль пролета, то при $a(x) = h(x) + t \approx h(x)$, из уравнений (2.17) и (2.21) следует, что A является линейным, а B_s квадратным полиномом. Если и q является величиной переменной (в простейшем случае $q = q_0 = \text{const}$), то M и Q также переменны по x . Правые части дифференциальных уравнений (2.224) и (2.35) являются, следовательно, дробно-рациональными функциями и тем самым замкнуто интегрируемыми; вычислительные затраты в общем достаточно большие.

Постоянные по отрезкам значения поперечного сечения.

Приближим непрерывный ход $A(x)$ и $B_s(x)$ с помощью "ступенчатых кривых" с постоянными по отрезкам значениями для A и B_s . Решение

дифференциальных уравнений (2.224) и (2.35) для каждого из этих отрезков в общем найти легко. Постоянные интегрирования, получаемые для каждого отрезка, необходимо находить с помощью условий перехода, которые получаются из требования непрерывности смещений между отдельными отрезками. В данном случае целесообразно также использовать способ матриц перехода [7].

Численный способ интегрирования.

Преобразуем дифференциальные уравнения (2.35) и приведем их к форме мультипликативных интегралов аналогично уравнениям (2.41) и (2.57), но с учетом переменности B_s и A с x . Эти интегралы для определенных значений x вычисляют с помощью численного способа интегрирования (например, правила Симпсона). Тогда ход смещений в зависимости от x получается по точкам.

Метод Ритца.

О методе Ритца уже было сказано в п. 2.3.2. Специально при допущенных здесь предпосылках целесообразен упрощенный способ раздельной минимизации Π_M и Π_Q .

2.5.3. Простой пример по теории второго порядка. В п. 2.2 рассматривались примеры многослойных балок, на которые не действуют осевое усилие, а имеется лишь поперечная нагрузка ($N \approx 0$, теория первого порядка). В дополнение к этому в данном разделе по теории второго порядка должен быть рассмотрен пример для многослойной балки: шарнирно-опертая однопролетная многослойная балка, согласно рис. 6, находится под одновременным воздействием сжимающего усилия $N = -P$ и поперечного усилия.

$$q(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{l} = q_0 \sin \pi \xi. \quad (2.225)$$

Основные дифференциальные уравнения выражены через уравнения (2.26). Если выражения:

$$w(x) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}; \quad \varphi(x) = \varphi_0 \cos \frac{\pi x}{l}, \quad (2.226)$$

которые выполняют все граничные условия, подставить в уравнения (2.26), то приравнованием коэффициентов в $\sin \pi x/l$ и $\cos \pi x/l$

с сокращениями β , согласно уравнению (2.47), и значения критической нагрузки, выраженной

$$P_K = \frac{\pi^2 B_s}{(1 + \pi^2 \beta) l^2}, \quad (2.227)$$

после неспешного расчета получится, что

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{Q_0 l^2}{\pi^2 B_s} \frac{1 + \pi^2 \beta}{1 - P/P_K} \sin \pi \xi, \\ \gamma &= \frac{Q_0 l^3}{\pi^2 B_s} \frac{\pi^2 \beta}{1 - P/P_K} \cos \pi \xi. \end{aligned} \right\} \quad (2.228)$$

Значения сдвигающих усилий следуют из уравнений (2.22) и (2.228) и имеют следующий вид:

$$M = \frac{Q_0 l^2}{\pi^2} \frac{1}{1 - P/P_K} \sin \pi \xi; \quad Q = \frac{Q_0 l}{\pi} \frac{1}{1 - P/P_K} \cos \pi \xi. \quad (2.229)$$

Множитель $1/(1 - P/P_K)$ в уравнениях (2.228) и (2.229) при $P=0$ (теория первого порядка) принимает значение 1, но сильно возрастает, если сжимающее усилие P приближается к критической нагрузке P_K . Следовательно, если при одновременной сжимающей и поперечной нагрузках на многослойную балку величина P настолько велика, что выражение $P/P_K \ll 1$ больше не является справедливым, тогда необходимо применять теорию второго порядка. Описание определения критической нагрузки P_K для других случаев опирания можно найти в гл. 7.

3. ИЗГИБ МНОГОСЛОЙНОЙ БАЛКИ С ПЛОСКИМИ ТОЛСТЫМИ ИЛИ ПРОФИЛИРОВАННЫМИ ВНЕШНИМИ СЛОЯМИ

3.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

3.1.1. Предпосылки. В данной главе рассматриваются вопросы определения прогибов, сдвигающих усилий и напряжений работающих на изгиб многослойных балок с плоскими, толстыми или профилированными внешними слоями. Допускаются следующие предпосылки, включая и те, которые касаются внешних слоев;

все слои из линейно-упругих материалов;

средний слой, однородный и по сравнению с внешними слоями мягкий, поэтому $\sigma_{HK} \approx 0$ и $\epsilon_{HK} = \text{const}$, при этом сжимаемость многослойной балки не наблюдается;

опирание многослойной панели — однопролетная несущая конструкция;

одновременное действие на балку нагрузки в виде поперечного и продольного усилий (теория второго порядка);

достаточно малые деформации (линейная теория многослойных конструкций).

Хотя внешние слои (как правило, различные) являются прямыми и параллельными один другому, их толщина такова, что их собственной жесткостью на изгиб по сравнению с такой же жесткостью всей многослойной балки нельзя пренебречь. Поэтому к напряжениям от M во внешних слоях прибавляются напряжения при изгибе, которые влияют на несущую способность многослойной балки. Жесткость внешних слоев

на сдвиг большая, так что их деформациями при сдвиге v_{xz} можно пренебречь. Таким образом, поперечные сечения этих слоев после деформации остаются плоскими и вертикальными к оси симметрии самих слоев (гипотеза Бернулли). Но общее поперечное сечение многослойной балки из-за деформаций при сдвиге среднего слоя превращается в ломаную и только местами плоскую поверхность (см. рис. 2). Многослойные балки с профилированными внешними слоями рассматриваются в п.3.5.1 их расчет можно легко свести к подобному же расчету многослойных балок с плоскими толстыми внешними слоями.

С целью сокращения в знаках формул различные индексы снова опускаются (см. заключение к п. 2.1.1).

3.1.2. Дифференциальные уравнения для w и γ . Общие положения. Вывод основных для многослойных балок с толстыми внешними слоями дифференциальных уравнений изгиба для w и γ в принципе тот же самый, что и для многослойных балок с тонкими внешними слоями (см. п. 2.1.2). Некоторые зависимости формул также те же самые, что и в п. 2.1.2; поэтому частично они могут быть заимствованы оттуда.

Деформации. Для угла сдвига среднего слоя, согласно уравнениям (2.2) и (2.3), справедливо, что

$$\gamma_1 = w', \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = w' + \gamma_2. \quad (3.1)$$

Напротив, деформации внешних слоев отличаются от деформаций, рассмотренных в п. 2.1.2, так как в данном случае уже нет предпосылок расчета, применимых к тонким внешним слоям. Поэтому необходимо учитывать, что они не могут быть больше просто заменены величинами u_u или u_o в центрах тяжести внешних слоев u или o . На основании рис. 2, который действителен и для данного случая, заимствуем:

$$\left. \begin{aligned} u_u &= \bar{u} + a_u \gamma_2 - z_u \gamma_1; \\ u_o &= \bar{u} - a_o \gamma_2 - z_o \gamma_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Подстановка этих значений u_u и u_o в выражения деформации (2.6) дает:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_u &= \bar{u} + a_u \gamma_2' - z_u \gamma_1'; \\ \epsilon_o &= \bar{u} - a_o \gamma_2' - z_o \gamma_1'. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Следовательно, деформации внешних слоев, согласно выражению (3.3), отличаются от деформации, согласно (2.8), соответственно на один дополнительный член, который предусматривает собственный изгиб внешних слоев.

Физические законы. Закон Гука для среднего слоя можно записать так:

$$\tau = \frac{\alpha}{h} G \gamma, \quad (3.4)$$

а для обоих внешних слоев:

$$\sigma_u = E_u \epsilon_u, \quad \sigma_o = E_o \epsilon_o. \quad (3.5)$$

В случае полного праятия поперечным деформациям внешних слоев необходимо в уравнение (3.5) вместо E ввести модифицированный модуль упругости $E' = E/(1 - \nu^2)$. При определении жесткости внешних слоев D_u и D_o , согласно уравнению (2.16), следует использовать действительный модуль упругости E , так как поперечным деформациям внешних слоев, вызванным мембранными напряжениями (из-за предположительно небольшой прочности среднего слоя на сдвиг и ограниченной ширины балки) как целой конструкции едва создаются препятствия. Напротив, при расчете собственной жесткости на изгиб B_u и B_o утолщенных внешних слоев, согласно уравнению (3.8), как в случае панелей или тонких и узких балок необходимо ввести модифицированный модуль упругости E' , так как поперечные деформации внешних слоев, вызванные собственными изгибающими напряжениями, в большинстве случаев сильно затрудняются.

Сдвигающие усилия в качестве равнодействующей напряжений поперечного сечения получаются из соотношений:

$$N = \int_{(F)} \sigma dF; \quad M = \int_{(F)} \sigma z dF; \quad Q = \int_{(F)} \tau dF. \quad (3.6)$$

Подставив в уравнение (3.5) значения деформаций согласно (3.3), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= E_u (\bar{u}' + a_u \gamma_2' - z_u \gamma_1'); \\ \sigma_o &= E_o (\bar{u} - a_o \gamma_2' - z_o \gamma_1'). \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Теперь отношения (3.7) подставим в первые два уравнения (3.6). При выполнении интегрирования в формулах получаются различные показатели поперечных сечений, а именно жесткость внешних слоев при деформации D_u , D_o и D . Согласно (2.16), собственная жесткость внешних слоев на изгиб B_u и B_o равна:

$$\begin{aligned} B_u &= E_u \int_{(F_u)} z_u z dF = E_u \int_{(F_u)} z_u (z_u + a_u) dF; \\ B_o &= E_o \int_{(F_o)} z_o z dF = E_o \int_{(F_o)} z_o (z_o - a_o) dF, \end{aligned}$$

после выполнения интегрирования получим:

$$B_u = E_u \frac{b t_u^3}{12} = E_u J_u; \quad B_o = E_o \frac{b t_o^3}{12} = E_o J_o. \quad (3.8)$$

Наконец, подстановкой всех показателей поперечного сечения получаем для продольной силы и изгибающего момента:

$$\left. \begin{aligned} N &= (D_u a_u - D_o a_o) \gamma_2' + D \bar{u}'; \\ M &= (D_u a_u - D_o a_o) \bar{u}' + B_s \gamma_2' - (B_u + B_o) \gamma_1'. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Второе соотношение (3.9) для изгибающего момента M можно разложить на следующие компоненты:

$$M_s = (D_u a_o - D_o a_u) \bar{u}' + B_s \gamma_2'; \quad (3.10)$$

$$\text{и} \quad M_u = -B_u \gamma'_1, \quad M_o = -B_o \gamma'_1. \quad (3.11)$$

Компонента M_s формулы (3.10) совпадает с M согласно (2.19). Составляющие M_u и M_o , согласно (3.11), являются дополнительными компонентами, которые зависят от собственного изгиба внешних слоев. Нормальные напряжения внешних слоев, вызванные действием M_s , обозначены на рис. 20 как σ_{su} и σ_{so} , нормальные напряжения внешних слоев, вызванные действиями M_u и M_o , — как σ_{su} и σ_{so} .

Теперь определением численных значений последнего уравнения формулы (3.6) необходимо найти поперечную силу. Напряжения сдвига в поперечном сечении многослойной конструкции складываются, так же как и нормальные напряжения внешних слоев, из двух компонентов: из напряжений сдвига τ_s в среднем и внешних слоях, вызванных действием внешней нагрузки на многослойную конструкцию, а также из напряжений сдвига внешних слоев τ_{su} и τ_{so} , вызванных собственным изгибом последних. В то время как равнодействующая напряжений сдвига τ_s , определяемая несущей способностью многослойной конструкции, получается

$$Q_s = A \tau \quad (3.12)$$

и совпадает с последним уравнением (2.19), то для равнодействующих напряжений сдвига τ_{su} и τ_{so} , вызванных изгибом внешних слоев, по правилам технической теории изгиба балок с учетом уравнения (3.11), справедливо

$$Q_u = M'_u = -B_u \gamma''_1; \quad Q_o = M'_o = -B_o \gamma''_1. \quad (3.13)$$

Следовательно, полная поперечная сила, согласно (3.6), составляет

$$Q = A \tau - (B_u + B_o) \gamma''_1. \quad (3.14)$$

Как и в разделе 2.1.2, в качестве базовой оси, согласно (2.20), берется ось центра тяжести с расстояниями a_u и a_o , а величина B_s — согласно (2.21). Если далее ввести общую жесткость многослойной балки на изгиб и определить как сумму жесткостей

$$B = B_s + B_u + B_o, \quad (3.15)$$

то с использованием уравнений (2.2) и (2.3) отношения (3.9) и (3.14) примут следующую форму:

$$\left. \begin{aligned} N &= D \bar{u}'; \\ M &= B_s \gamma' - B w''; \\ Q &= A \tau - (B_u + B_o) w''. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Отношения (3.16) соответствуют отношениям (2.22) для многослойных балок с тонкими покровными слоями — при $B_u = B_o = 0$ они совпадают.

Условия равновесия элемента балки. Условия равновесия $\sum M_y = 0$ и $\sum P_x = 0$ деформированного элемента балки дают те же самые отношения между M , N и Q и соответственно M , N^* и Q^* , что и в п. 2.1.2 [см. уравнения (2.23) и (2.24)].

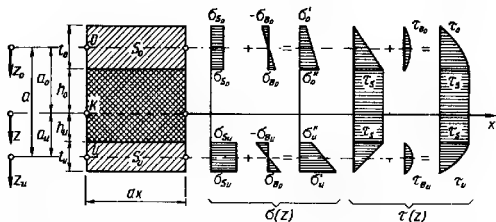


Рис. 20. Недеформированный элемент многослойной балки и распределение напряжений при толстых внешних слоях

Дифференциальные уравнения для w и γ . Если второе и третье уравнения (3.16) подставить в условия равновесия (2.24), то с учетом уравнения (3.15) для постоянных (т.е. независимых от x) значений поперечных сечений B_s и A получим:

$$B_s(\gamma'' - w''') - A\gamma = 0; \quad A\gamma' + Nw'' - (B_u + B_o)w''' = -q. \quad (3.17)$$

Решая эти два дифференциальных уравнения, с учетом действия продольной силы N получим:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{B_u + B_o}{A} w''' + \left(\frac{B}{B_s} + \frac{N}{A}\right) w'' - \frac{N}{B_s} w' + \frac{q}{B_s} - \frac{q''}{A}; \\ -\frac{B_u + B_o}{A} \gamma''' + \left(\frac{B}{B_s} + \frac{N}{A}\right) \gamma'' - \frac{N}{B_s} \gamma' = -\frac{q'}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Это и есть искомые дифференциальные уравнения для w и γ при расчете по теории второго порядка. Их решения выполняют также и нерасчлененные дифференциальные уравнения (3.17), откуда получаются известные зависимости между постоянными интегрирования в решениях для w и γ обоих дифференциальных уравнений (3.18).

Особый случай: отсутствие продольной силы. Если в многослойной балке отсутствует продольная сила ($N = 0$, теория первого порядка), тогда из уравнений (3.17) и (3.18) получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{B_u + B_o}{A} w''' + \frac{B}{B_s} w'' = +\frac{q}{B_s} - \frac{q''}{A}; \\ -\frac{B_u + B_o}{A} \gamma''' + \frac{B}{B_s} \gamma'' = -\frac{q'}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Вместо уравнений (3.19) через интегрирование или с помощью уравнения (3.16) можно записать:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{B_u + B_o}{A} w''' + \frac{B}{B_s} w'' = -\frac{M}{B_s} - \frac{q}{A}; \\ -\frac{B_u + B_o}{A} \gamma''' + \frac{B}{B_s} \gamma'' = +\frac{Q}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Отношения (3.20) подходят для расчета статически определимых многослойных балок, так как в данном случае общие сдвигающие усилия M и Q могут быть заранее определены из условий равновесия. Напротив, при статически неопределимых многослойных балках (например, при многопролетной неразрезной балке), у которых M и Q заранее неизвестны, необходимо пользоваться отношениями (3.19), так как они содержат M и Q не явно. Относительно статической неопределимости многослойной балки с толстыми внешними слоями см. замечание в конце п. 3.1.4.

Предельные случаи дифференциальных уравнений (3.18). а) Тонкие внешние слои. При тонких внешних слоях их собственной жесткостью на изгиб B_u и B_o можно пренебречь. Подставив $B_u = B_o = 0$ в уравнение (3.18) и приняв во внимание, что тогда согласно уравнению (3.15) $B_s = B$, получим дифференциальные уравнения (3.18) в виде уже известных уравнений (2.26).

б) Эластичный средний слой. При эластичном среднем слое жесткость на сдвиг равна нулю. Подставив $A=0$ в дифференциальные уравнения (3.18), предварительно умноженные на A , после двух- или трехкратного интегрирования получим:

$$(B_u + B_o)w'' - Nw' = q; \quad (B_u + B_o)\gamma'' - N\gamma' = q \quad (3.21)$$

Первое из уравнений (3.21) является дифференциальным уравнением изгиба двух свободно расположенных одна на другой без трения скользящих балок с жесткостью на изгиб B_u и B_o . В результате сравнения обоих дифференциальных уравнений (3.21) следует $\gamma = w'$. Следовательно, с учетом (2.2) и (2.3) $\gamma_2 = 0$, т.е. точки u и o на обоих осях центра тяжести, вертикально наложенные одна на другую, и после деформации так же точно располагаются одна над другой (см. рис. 21,б). Этот результат вполне понятен: из-за эластичности среднего слоя на сдвиг оси центра тяжести внешних слоев не поддаются какой-либо деформации, а тем самым и какому бы то ни было восприятию нормальной силы, поэтому несущая способность "сэндвича" равна нулю (см. рис. 21,а).

в) Средний слой, неподатливый на сдвиг. В случае неподатливого на сдвиг среднего слоя жесткость на сдвиг бесконечно велика. Если в дифференциальные уравнения (3.18) подставить $A = \infty$ и умножить на B_s , получим:

$$Bw'' - Nw' = q; \quad B\gamma'' - N\gamma = 0. \quad (3.22)$$

Первое уравнение (3.22) является дифференциальным уравнением изгиба балки с общей жесткостью на изгиб B согласно уравнению (3.15) (неподвижное соединение между двумя внешними слоями), а из второго уравнения (3.22) следует, что $\gamma = 0$, т.е. при сдвиге не возникает никаких деформаций среднего слоя (ср. рис. 21,в). Таким образом, из-за неподатливости среднего слоя на сдвиг поперечное сечение многослойной конструкции остается плоским, внешние слои в полной мере привлекаются к совместной работе и несущая способность многослойной конструкции достигает поэтому своего максимума (рис. 21). Так как жесткость многослойной балки на сдвиг постоянно принимает значение меж-

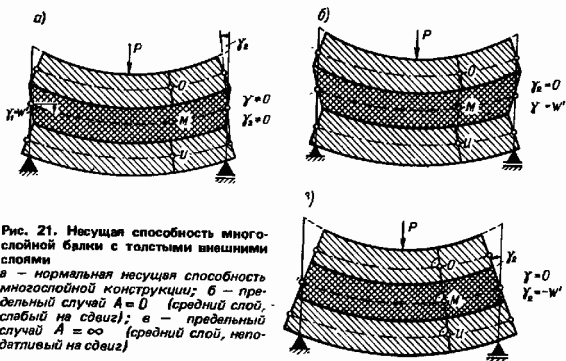


Рис. 21. Несущая способность многослойной балки с толстыми внешними слоями

а — нормальная несущая способность многослойной конструкции; б — предельный случай $A = 0$ (средний слой, слабый на сдвиг); в — предельный случай $A = \infty$ (средний слой, неподатливый на сдвиг)

ду 0 и ∞ , то с помощью только что описанных предельных случаев б и в даны нижние и верхние границы несущей способности многослойной конструкции и все зависящие от нее статические величины.

Примечание. При многослойных балках с тонкими внешними слоями общий прогиб w можно разложить на две составляющие таким образом (ср. п. 2.1.3), чтобы одна возникла только от действия изгибающего момента M (компонента изгиба w_M), а другая только от поперечной силы Q (компонента w_Q). При многослойных балках с толстыми внешними слоями из-за наличия собственной несущей способности последних подобное разделение общего прогиба на две составляющие с одинаковым значением обоих составляющих невозможно. Поэтому для дифференциальных уравнений (3.18) для многослойных балок с толстыми внешними слоями не существует эквивалентной альтернативы, как при многослойных балках с тонкими внешними слоями [ср. дифференциальные уравнения (2.26) и (2.33)].

3.1.3. Граничные и промежуточные условия. Граничные условия. При интегрировании дифференциальных уравнений (3.18) получаются произвольные постоянные интегрирования, расчет которых осуществляется с помощью граничных условий. Подбор наиболее важных видов опирания на концах балки вместе с соответствующими уравнениями условий для многослойных балок с толстыми внешними слоями указан в табл. 3.1. Уравнения, выраженные через w и γ в графе IV табл. 3.1, получаются из уравнений графы III с использованием соотношений (3.1), (3.11) и (3.16). Упругие опоры и поворотно-упругие закрепления могут учитываться таким же образом, как и в п. 2.1.4 (табл. 2.1).

Для каждого конца многослойной балки с толстыми внешними слоями необходимо выполнить три граничных условия, а для всей балки, следовательно, шесть. Число уравнений соответственно совпадает с порядком дифференциального уравнения (3.18) для w . При независимом одно от другого интегрировании обоих дифференциальных уравнений (3.18) сначала получается более четырех постоянных интегрирования в

Таблица 3.1. Граничные условия многослойных балок с толстыми внешними слоями

Вид опирания		Наличие торцевой панели	Уравнения условия, выраженные через	
			смещения и сдвигающие усилия	w и γ
I	II	III	IV	V
	Шарнирная опора	Нет	$w = 0$ $M = 0$ $M_{x,0} = 0$	$w = 0$ $\gamma' = 0$ $w'' = 0$
		Есть	$w = 0$ $M = 0$ $\gamma = 0$	$w = 0$ $B_3 \gamma' - B w'' = 0$ $\gamma = 0$
	Неподвижное жесткое закрепление	Нет	$w = 0$ $\gamma_2 = 0$ $M_{x,0} = 0$	$w = 0$ $\gamma - w' = 0$ $w'' = 0$
		Есть	$w = 0$ $\gamma_2 = 0$ $\gamma = 0$	$w = 0$ $w'' = 0$ $\gamma = 0$
	Свободный конец балки	Нет	$H = 0$ $Q = 0$ $M_{x,0} = 0$	$\gamma' = 0$ $A \gamma - (B_0 + B_n) w'' = 0$ $w'' = 0$
		Есть	$H = 0$ $Q = 0$ $\gamma = 0$	$B_3 \gamma' - B w'' = 0$ $w'' = 0$ $\gamma = 0$
	Жесткое закрепление с вертикальным перемещением	Нет	$\gamma_2 = 0$ $Q = 0$ $M_{x,0} = 0$	$\gamma - w' = 0$ $A \gamma - (B_0 + B_n) w'' = 0$ $w'' = 0$
		Есть	$\gamma_2 = 0$ $Q = 0$ $\gamma = 0$	$w' = 0$ $w'' = 0$ $\gamma = 0$

выражениях для w и γ . С помощью первого уравнения (3.17) подстановкой можно все-таки определить известные зависимости между постоянными интегрирования, так что в конце остаются шесть неизвестных постоянных для уравнений граничных условий.

Если в случае статически определяемой балки без продольной силы вместо уравнения (3.19) исходить из отношений (3.20), то вместо шести необходимо выполнить только четыре граничных условия, так как при этом уже удовлетворяются оба граничных условия общих сдвигающих усилий (см. п. 3.2.1).

Промежуточные условия. В пролете балки могут быть заданы известные условия относительно возможностей перемещения многослойной

балки (промежуточные условия). Подбор основных промежуточных условий со всеми необходимыми уравнениями условий для многослойных балок с тонкими внешними слоями дан в табл. 3.2. Упругие промежуточные опоры и поворотно-упругие промежуточные закрепления могут быть учтены так же, как и в п. 2.1.4 (табл. 2.2). Примеры расчетов даны в п. 3.2.

3.1.4. Напряжения в многослойных балках. Вычислив из уравнений (3.18) смещения w и γ с учетом граничных промежуточных условий, с помощью уравнений (3.16) можно определить изгибающий момент M и поперечную силу Q многослойной балки. M и Q разлагаются каждое на три составляющие и соответственно:

$$M = M_s + M_u + M_o; \quad Q = Q_s + Q_u + Q_o, \quad (3.23)$$

причем с учетом уравнений (3.10) по (3.13):

$$\left. \begin{aligned} M_s &= B_s \gamma'_2 = B_s (\gamma' - w''); & Q_s &= A \gamma; \\ M_u &= -B_u \gamma'_1 = -B_u w''; & Q_u &= -B_u \gamma'_1 = -B_u w''; \\ M_o &= -B_o \gamma'_1 = -B_o w''; & Q_o &= -B_o \gamma'_1 = -B_o w''. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Т а б л и ц а 3.2. Промежуточные условия многослойных балок с толстыми внешними слоями

Промежуточные условия		Скачок	Уравнения условий, выраженные через	
			смещения и сдвигающие усилия	w и γ
I	II	III	IV	V
	Неподвижная промежуточная опора	$\Delta Q, \Delta Q_{u,0}$	$w=0$	$w=0$
	Промежуточное закрепление с вертикальным смещением	$\Delta M, \Delta M_s$	$\gamma_2=0$	$\gamma-w'=0$
	Неподвижная вертикальная перегородка (стенке)	$\Delta N_s, \Delta M_{u,0}$	$\gamma=0$	$\gamma=0$
	Шернир в месте действия изгибающего момента	$\Delta \gamma_1, \Delta \gamma_2$	$M=0$	$B_s \gamma' - B_u w''=0$
	Шернир в месте действия поперечной силы	Δw	$Q=0$	$A \gamma - (B_u + B_o) w''=0$
	Шерниры во внешних слоях	$\Delta \gamma, \Delta \gamma_1$	$M_u = M_o = 0$	$w''=0$

M_s и Q_s в уравнениях (3.23) обозначают составные сдвигающих усилий, воспринимаемые многослойной балкой-сэндвичем*, а M_u , M_o и соответственно Q_u , Q_o — составляющие сдвигающих усилий, воспринимаемые через собственный изгиб обоих покрывающих слоев; в дальнейшем будем называть их "частичные сдвигающие усилия" (частичные моменты изгиба и частичные поперечные силы). Зная их можно определить и напряжения. Решение отношений (3.24) по величинам деформации и подстановка в уравнения (3.7) и (3.4) после незначительных преобразований с учетом уравнений (2.16), (2.17), (2.20), (2.21) и (3.8) дают для нормальных напряжений σ_u и σ_o внешних слоев и касательных напряжений τ_s среднего слоя следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{1}{F_u} \left(\frac{D_u}{D} N + \frac{1}{\alpha} M_s \right) + \frac{z_u}{J_u} M_u; \\ \sigma_o &= \frac{1}{F_o} \left(\frac{D_o}{D} N - \frac{1}{\alpha} M_s \right) + \frac{z_o}{J_o} M_o; \quad \tau_s = \frac{1}{\alpha b} Q_s. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Если искомыми являются максимальные значения нормальных напряжений внешних слоев, возникающие на их внешних краях (σ'_u и σ'_o согласно рис. 20), то в уравнениях (3.25) необходимо предположить, что $z_u = t_u/2$ и $z_o = -t_o/2$.

Кроме того, во внешних слоях (см. рис. 20) возникают еще и напряжения сдвига τ_u , τ_o . При прямоугольном сечении внешних слоев они складываются из:

составляющей напряжений сдвига, происходящей от несущей способности "сэндвича", линейно уменьшающейся со стороны среднего слоя к внешней стороне;

составляющей напряжения сдвига, происходящей от собственного изгиба внешних слоев и параболически распределенной по толщине среднего слоя.

Наложением обеих составляющих получим:

$$\left. \begin{aligned} \tau_u &= \frac{1}{2} \left(1 - 2 \frac{z_u}{t_u} \right) \tau_s + \frac{3}{2} \left(1 - 4 \frac{z_u^2}{t_u^2} \right) \frac{Q_u}{F_u}; \\ \tau_o &= \frac{1}{2} \left(1 + 2 \frac{z_o}{t_o} \right) \tau_s + \frac{3}{2} \left(1 - 4 \frac{z_o^2}{t_o^2} \right) \frac{Q_o}{F_o} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

при τ_s согласно уравнениям (3.25), Q_u , Q_o согласно уравнениям (3.24) и F_u , F_o по (2.16).

П р и м е ч а н и е. Если напряжения для многослойных балок с тонкими внешними слоями можно определить непосредственно из общих сдвигающих усилий M и Q [ср. отношения (2.36)], то для многослойных балок с толстыми внешними слоями это невозможно. В данном случае необходимо сначала рассчитать по уравнениям (3.24) частичные сдвигающие усилия, которые определяются не только из условий равновесия поперечного сечения, но и с помощью величин деформаций ϵ_1 , ϵ_2 и γ . Только тогда можно будет рассчитать напряжения согласно уравнениям (3.25) и (3.26). Поэтому многослойные балки с толстыми внешними слоями являются статически неопределимыми.

*Они совпадают с M и Q по уравнению (2.22) для многослойных балок с тонкими внешними слоями.

3.2.1. Многослойная балка без торцевой панели, шарнирно-опертая по двум сторонам. Произвольная поперечная нагрузка $q(x)$. Многослойная балка имеет статически определимое опирание (см. рис. 6), поэтому можно исходить из дифференциальных уравнений (3.20). Тогда с помощью безразмерных величин

$$\alpha = \frac{B_u + B_v}{B_s}, \quad \beta = \frac{B_s}{A l^2}, \quad \lambda^2 = \frac{1 + \alpha}{\alpha \beta} \quad (3.27)$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} w'' - \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 w'' &= + \frac{1}{B} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 (M + \beta l^2 q); \\ \tau'' - \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \tau &= - \frac{1}{B} \beta \lambda^2 q. \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Общие решения дифференциальных уравнений (3.28) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} w &= C_1 \cosh \frac{\lambda x}{l} + C_2 \sinh \frac{\lambda x}{l} + C_3 + C_4 x + w_p; \\ \tau &= D_1 \cosh \frac{\lambda x}{l} + D_2 \sinh \frac{\lambda x}{l} + \tau_p, \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

где w_p и τ_p — интегралы дифференциальных уравнений (3.28). Отношения (3.28) должны также удовлетворять первому уравнению (3.17), которое с сокращениями (3.27) принимает форму

$$\beta l^2 (\tau'' - w'') = \tau. \quad (3.30)$$

Если в уравнение (3.30) подставить уравнения (3.29) и учесть при этом, что интегралы w_p и τ_p идентичны, то между постоянными интегрирования C_1 , C_2 , D_1 и D_2 с учетом уравнений (3.28) получим следующие зависимости:

$$D_1 = \frac{(1 + \alpha)\lambda}{l} C_2; \quad D_2 = \frac{(1 + \alpha)\lambda}{l} C_1.$$

Тогда второе уравнение (3.29) имеет вид

$$\tau = \frac{(1 + \alpha)\lambda}{l} \left(C_2 \cosh \frac{\lambda x}{l} + C_1 \sinh \frac{\lambda x}{l} \right) + \tau_p. \quad (3.31)$$

Следовательно, w , согласно уравнениям (3.29), и τ , согласно (3.31), содержит вместе еще четыре произвольные постоянные интегрирования — столько же, сколько граничных условий.

Уравнения граничных условий согласно табл. 3.1, строка 1 для многослойной балки шарнирно опертой по двум сторонам без торцевой панели имеют следующий вид:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad w'(l) = 0.$$

Граничные условия $\tau(0) = 0$ и $\tau(l) = 0$, а также $M(0) = 0$ и $M(l) = 0$, приведенные в табл. 3.1, здесь не используются, так как они выражены в уравнениях (3.28) через $M(x)$. Подстановка уравнений (3.29) и (3.31)

в уравнения граничных условий и решение по постоянным интегрирования дает следующее:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 w_p''(0), \quad C_3 = +\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 w_p''(0) - w_p(0), \\ C_2 &= +\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{w_p(0) \cosh \lambda - w_p(l)}{\sinh \lambda}, \\ C_4 &= +\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{w_p'(l) - w_p'(0)}{l} - \frac{w_p(l) - w_p(0)}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Подстановка уравнений (3.32) в уравнения (3.29) и (3.31) дает выражение смещений $w(x)$ и $\gamma(x)$ данной многослойной балки.

Постоянная распределенная нагрузка. Посредством сдвигающих усилий:

$$M = \frac{Q_0}{l}(lx - x^2), \quad Q = \frac{Q_0}{2}(l - 2x), \quad (3.33)$$

методом вариации постоянных или с помощью полиномиального выражения [8] можно найти для уравнений (3.28) частные интегралы:

$$\left. \begin{aligned} w_p &= \frac{Q_0}{24B} \left(x^4 - 2lx^3 - \frac{12}{\alpha\lambda^2} l^2 x^2 \right); \\ \gamma_p &= \frac{Q_0 l^2}{2B} \beta (l - 2x). \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Тогда, согласно уравнениям (3.32), получаются постоянные:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= +\frac{Q_0 l^4}{B} \frac{1}{\alpha\lambda^4}; \quad C_2 = -\frac{Q_0 l^4}{B} \frac{1}{\alpha\lambda^4} \frac{\cosh \lambda - 1}{\sinh \lambda}; \\ C_3 &= -\frac{Q_0 l^4}{B} \frac{1}{\alpha\lambda^4}; \quad C_4 = -\frac{Q_0 l^3}{B} \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{2\alpha\lambda^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Подстановка этих постоянных в уравнения (3.29) и (3.31) после некоторых преобразований для смещений многослойной балки при $\xi = x/l$ дает:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{Q_0 l^4}{B} \left[\frac{1}{24} \xi(1-2\xi+\xi^3) + \frac{1}{2\alpha\lambda^2} \xi(1-\xi) - \frac{1}{\alpha\lambda^4} \frac{\cosh \lambda/2 - \cosh \lambda(1-2\xi)/2}{\cosh \lambda/2} \right]; \\ \gamma &= \frac{Q_0 l^3}{B} \left[\frac{1}{2} (1-2\xi) - \frac{1}{\lambda} \frac{\sinh \lambda(1-2\xi)/2}{\cosh \lambda/2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Из уравнений (3.35) на основании уравнений (3.24) и с помощью безразмерных величин

$$\alpha_u = \frac{B_u}{B_s}, \quad \alpha_o = \frac{B_o}{B_s}, \quad \alpha_u + \alpha_o = \alpha \quad (3.37)$$

после некоторого расчета получаем частичные сдвигающие усилия многослойной балки:

$$\left. \begin{aligned} M_s &= q_0 t^2 \frac{1}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2} \xi(1-\xi) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\cosh \lambda/2 - \cosh \lambda(t-2\xi)/2}{\cosh \lambda/2} \right]; \\ M_{u,0} &= q_0 t^2 \frac{\alpha_{u,0}}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2} \xi(1-\xi) + \frac{1}{\alpha \lambda^2} \frac{\cosh \lambda/2 - \cosh \lambda(t-2\xi)/2}{\cosh \lambda/2} \right]; \\ Q_s &= q_0 t \frac{1}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2} (1-2\xi) - \frac{1}{\lambda} \frac{\sinh \lambda(t-2\xi)/2}{\cosh \lambda/2} \right]; \\ Q_{u,0} &= q_0 t \frac{\alpha_{up}}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2} (1-2\xi) + \frac{1}{\alpha \lambda} \frac{\sinh \lambda(t-2\xi)/2}{\cosh \lambda/2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Три предельных случая $A = \infty$, $A=0$ и $B_u = B_s = 0$ дают результаты, описанные в п. 3.1.2.

Сосредоточенная нагрузка P в пролете. В точке $x=e$ или $\xi=e/t = \varepsilon$ действует сосредоточенная нагрузка P . Как и в п. 2.2.4, она может быть записана в форме (2.79) с помощью δ -функции Дирака. Срезающие нагрузки данной многослойной балки определяются из уравнений (2.24) при $N=0$, т.е. из

$$M' = Q, \quad Q' = -P\delta(x-e).$$

и с учетом граничных условий $M(0) = 0, M(t) = 0$ получаем:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{P}{t} \left[(t-e)x - t(x-e)h(x-e) \right]; \\ Q &= \frac{P}{t} \left[t-e - t h(x-e) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Посредством уравнений (3.39) для (3.28) с помощью метода вариации постоянных [8] можно найти частные интегралы:

$$\left. \begin{aligned} w_p &= \frac{P}{6B\ell} \left[-(t-e)x^3 + t(x-e)^3 h(x-e) - \frac{Pt}{B} \frac{1}{\lambda^2} \left[(t-e)x + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\alpha} \left(x-e - \frac{\sinh \lambda(x-e)/t}{\lambda/t} \right) h(x-e) \right] \right]; \\ \tau_p &= \beta \frac{Pt}{B} \left[t-e - t \left(1 - \cosh \frac{\lambda(x-e)}{t} \right) h(x-e) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Тогда, согласно (3.32), при $\xi = x/t$ получим постоянные:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0; \quad C_2 = -\frac{Pt^3}{B} \frac{1}{\alpha \lambda^3} \frac{\sinh \lambda(t-\varepsilon)}{\sinh \lambda \varepsilon}; \\ C_3 &= 0; \quad C_4 = +\frac{Pt^2}{B} (t-\varepsilon) \left[\frac{1}{6} \varepsilon(2-\varepsilon) + \beta \right]. \end{aligned}$$

Подстановка этих постоянных в уравнения (3.29) и (3.31) после некоторых преобразований дает перемещения многослойной балки:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{Pl^3}{B} \left[\frac{1}{6} (1-\varepsilon) \xi (2\varepsilon - \varepsilon^2 - \xi^2) + \frac{1}{\alpha \lambda^2} (1-\varepsilon) \xi - \frac{1}{\alpha \lambda^3} \frac{\sinh \lambda (1-\varepsilon)}{\sinh \lambda} \sinh \lambda \xi \right]; \\ w_2 &= \frac{Pl^3}{B} \left[\frac{1}{6} \varepsilon (1-\xi) (-\varepsilon^2 + 2\xi - \xi^2) + \frac{1}{\alpha \lambda^2} \varepsilon (1-\varepsilon) - \frac{1}{\alpha \lambda^3} \frac{\sinh \lambda \varepsilon}{\sinh \lambda} \sinh \lambda (1-\xi) \right]; \\ \tau_1 &= \frac{Pl^2}{B} \beta \left[1-\varepsilon - \frac{\sinh \lambda (1-\varepsilon)}{\sinh \lambda} \cosh \lambda \xi \right]; \\ \tau_2 &= \frac{Pl^2}{B} \beta \left[-\varepsilon + \frac{\sinh \lambda \varepsilon}{\sinh \lambda} \cosh \lambda (1-\xi) \right], \end{aligned} \right\} (3.41)$$

где индекс 1 действителен для $0 \leq \xi \leq \varepsilon$, а индекс 2 — для $\varepsilon \leq \xi \leq 1$.

Из уравнений (3.41), (3.24) и с помощью безразмерных величин (3.37) после некоторого расчета получаем частичные сдвигающие усилия многослойной балки:

$$\left. \begin{aligned} M_{s1} &= Pl \frac{1}{1+\alpha} \left[(1-\varepsilon) \xi - \frac{\sinh \lambda (1-\varepsilon)}{\lambda \sinh \lambda} \sinh \lambda \xi \right]; \\ M_{s2} &= Pl \frac{1}{1+\alpha} \left[\varepsilon (1-\xi) - \frac{\sinh \lambda \varepsilon}{\lambda \sinh \lambda} \sinh \lambda (1-\xi) \right]; \\ M_{u,01} &= Pl \frac{\alpha_{u,0}}{1+\alpha} \left[(1-\varepsilon) \xi + \frac{\sinh \lambda (1-\varepsilon)}{\alpha \lambda \sinh \lambda} \sinh \lambda \xi \right]; \\ M_{u,02} &= Pl \frac{\alpha_{u,0}}{1+\alpha} \left[\varepsilon (1-\xi) + \frac{\sinh \lambda \varepsilon}{\alpha \lambda \sinh \lambda} \sinh \lambda (1-\xi) \right]; \\ Q_{s1} &= P \frac{1}{1+\alpha} \left[1-\varepsilon - \frac{\sinh \lambda (1-\varepsilon)}{\sinh \lambda} \cosh \lambda \xi \right]; \\ Q_{s2} &= P \frac{1}{1+\alpha} \left[-\varepsilon + \frac{\sinh \lambda \varepsilon}{\sinh \lambda} \cosh \lambda (1-\xi) \right]; \\ Q_{u,01} &= P \frac{\alpha_{u,0}}{1+\alpha} \left[1-\varepsilon + \frac{\sinh \lambda (1-\varepsilon)}{\alpha \sinh \lambda} \cosh \lambda \xi \right]; \\ Q_{u,02} &= P \frac{\alpha_{u,0}}{1+\alpha} \left[-\varepsilon - \frac{\sinh \lambda \varepsilon}{\alpha \sinh \lambda} \cosh \lambda (1-\xi) \right]. \end{aligned} \right\} (3.42)$$

Три предельных случая $A = \infty$, $A = 0$ и $B_x = B_y = 0$ дают разупругие, рассмотренные в п. 3.1.2.

Если в уравнения (3.41) и (3.42) подставить $P = 1$, то получим линии влияния для перемещений и соответственно частичных сдвигающих усилий двинутой многослойной балки. Они могут использоваться для расчета перемещений и частичных сдвигающих усилий при любой сосредоточенной нагрузке $q(\xi)$ [см. (2.52) и (2.53)].

3.2.2. Многослойная балка с торцовыми панелями, шарнирно-опертая по двум сторонам. Произвольная поперечная. Как и в п. 3.2.1, можно исходить из уравнений (3.29) и (3.31). Согласно табл. 3.1, строка 2 для многослойной балки, шарнирно-опертой по двум сторонам, с торцовыми панелями необходимо выполнить следующие граничные условия:

$$w(0) = 0; \quad \tau(0) = 0; \quad w(1) = 0; \quad \tau(1) = 0.$$

Подстановка уравнений (3.29) и (3.31) в уравнения граничных условий и решение по постоянным интегрирования дает следующее:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= + \frac{1}{(1+\alpha)\lambda} \frac{\gamma_p(0) \cosh \lambda - \gamma_p(l)}{\sinh \lambda}; & C_2 &= - \frac{1}{(1+\alpha)\lambda} \gamma_p(0); \\ C_3 &= - \frac{1}{(1+\alpha)\lambda} \frac{\gamma_p(0) \cosh \lambda - \gamma_p(l)}{\sinh \lambda} - w_p(0); \\ C_4 &= + \frac{1}{(1+\alpha)\lambda} \frac{\cosh \lambda - 1}{\sinh \lambda} [\gamma_p(l) + \gamma_p(0)] - \frac{w_p(l) - w_p(0)}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Подстановка уравнений (3.43) в уравнения (3.29) и (3.31) дает перемещения $w(x)$ и $\gamma(x)$ данной многослойной балки.

Постоянная распределенная нагрузка q_0 . С помощью частных интегралов, согласно (3.34), из уравнений (3.43) получаются следующие отношения:

$$\begin{aligned} C_1 &= + \frac{q_0 l^4}{B} \frac{\beta}{2(1+\alpha)\lambda} \frac{\cosh \lambda + 1}{\sinh \lambda}; \\ C_2 &= - \frac{q_0 l^4}{B} \frac{\beta}{2(1+\alpha)\lambda}; & C_3 &= - \frac{q_0 l^4}{B} \frac{\beta}{2(1+\alpha)\lambda} \frac{\cosh \lambda + 1}{\sinh \lambda}; \\ C_4 &= + \frac{q_0 l^4}{B} \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{2\alpha\lambda^2} \right). \end{aligned}$$

Подстановка этих постоянных в уравнения (3.29) и (3.31) при $\xi = x/l$ после некоторых преобразований дает следующие перемещения многослойной балки:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{q_0 l^4}{B} \left[\frac{1}{24} \xi(1-2\xi^2+\xi^3) + \frac{1}{2\alpha\lambda^2} \xi(1-\xi) - \frac{1}{2\alpha\lambda^3} \frac{\cosh \lambda/2 - \cosh \lambda(1-2\xi)/2}{\sinh \lambda/2} \right]; \\ \gamma &= \frac{q_0 l^3}{B} \left[\frac{1}{2} (1-2\xi) - \frac{\sinh \lambda(1-2\xi)/2}{2 \sinh \lambda/2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Частичные сдвигающие усилия определяются из уравнений (3.44) на основании (3.24) и безразмерных сокращений (3.37) и после некоторого расчета принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} M_s &= q_0 l^2 \frac{1}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2} \xi(1-\xi) + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\cosh \lambda(1-2\xi)/2}{2 \sinh \lambda/2} - \frac{1}{\lambda} \right) \right]; \\ M_{u,0} &= q_0 l^2 \frac{\alpha_{u,0}}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2} \xi(1-\xi) - \frac{1}{\alpha\lambda} \left(\frac{\cosh \lambda(1-2\xi)/2}{2 \sinh \lambda/2} - \frac{1}{\lambda} \right) \right]; \\ Q_s &= q_0 l \frac{1}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2} (1-2\xi) - \frac{\sinh \lambda(1-2\xi)/2}{2 \sinh \lambda/2} \right]; \\ Q_{u,0} &= q_0 l \frac{\alpha_{u,0}}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2} (1-2\xi) + \frac{1}{\alpha} \frac{\sinh \lambda(1-2\xi)/2}{2 \sinh \lambda/2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

Предельные случаи $A = \infty$, $A = 0$ и $B_u = B_o = 0$ дают результаты, рассмотренные в п. 3.1.2.

3.2.3. Сравнительный численный пример. Необходимо исследовать влияние неподвижных торцовых панелей на концах шарнирно-опертой многослойной балки на ее смещения, деформацию и частичные сдвигающие усилия. Для этого численно определяются результаты п. 3.2.1 (многослойная балка без торцовой панели) и п. 3.2.2 (многослойная балка с торцовой панелью) в местах $x = l/2$ и $x=0$ для некоторых численных значений параметров α и β . Для α выбирается только $\alpha = 0,5$ (постоянное соотношение момента инерции), для β , напротив, исследуются различные значения (переменная жесткость среднего слоя на сдвиг). Для ограничения результатов рассматриваются также и оба предельных случая $\beta = 0$ (средний слой, неподвижный на сдвиг) и $\beta = \infty$ (средний слой слабый на сдвиг). Формулы для соответствующих деформаций и частичных сдвигающих усилий получаются из отношений (3.36) и (3.38) и соответственно (3.44) и (3.45). Например, в случае $\beta = \infty$ ($\lambda = 0$) для прогиба в середине пролета получаем:

$$w = \frac{5(1+\alpha)q_0 l^4}{384\alpha B} \quad \text{без торцовой панели;}$$

$$w = \frac{1+5\alpha}{384\alpha} \frac{q_0 l^4}{B} \quad \text{с торцовой панелью.}$$

Из табл. 3.3 явствует, что в области меньших β -величин (примерно $\beta = 0 \dots 0,12$) влияние торцовых панелей на прогиб и частичные моменты изгиба в середине пролета (а именно на достаточном расстоянии от торцовых панелей) хотя и четко определимо, но все-таки не так значительно (отклонения прогибов максимально составляют 20%, а частичных моментов изгиба — 11%).

3.3. ВЫРАЖЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

3.3.1. Выражения энергии. Энергия деформации W многослойной балки с толстыми внешними слоями длиной l , на которую действуют поперечные и продольные нагрузки, получается из общей формулы (2.93). Если сюда на основании формулы (3.5) подставить σ_x (3.4) — τ , ϵ на основании (3.3) и применить значения поперечных сечений B_s , B_u , B_o и A согласно (2.21), (3.8) и (2.17), то аналогично расчетам в п. 2.3.1. получим

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l B_s (\tau' - W'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l (B_u + B_o) W'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l A \tau^2 dx. \quad (3.46)$$

W по формуле (3.46) отличается от W по формуле (2.94) только дополнительным членом, который представляет собой энергию изгиба толстых внешних слоев.

Потенциал U внешних сил, а также энергия деформации V упругих опор принимают ту же форму, как и в случае многослойных балок с тонкими внешними слоями [см. (2.96) и (2.98)].

Таблица 3.3. Прогибы и сдвигающие усилия многослойной балки при наличии торцевой панели на концах и без нее

Статистические величины	$\frac{W}{q_0 l^4/B}$	$\frac{\tau}{q_0 l^3/B}$	$\frac{M_s}{q_0 l^2}$	$\frac{M_u + M_o}{q_0 l^2}$	$\frac{M_s}{q_0 l}$	$\frac{M_u + M_o}{q_0 l}$
Значения X	$l/2$	0	$l/2$	$l/2$	0	0
$\alpha=0,5$ $\beta=0$ $\lambda=\infty$	<u>0,01302</u> 0,01302	<u>0</u> 0	<u>0,08333</u> 0,08333	<u>0,04167</u> 0,04167	<u>0</u> 0	<u>0</u> 0
$\alpha=0,5$ $\beta=0,03$ $\lambda=10$	<u>0,01532</u> 0,01453	<u>0,01200</u> 0	<u>0,07676</u> 0,07757	<u>0,04824</u> 0,04744	<u>0</u> 0,02667	<u>0</u> -0,02667
$\alpha=0,5$ $\beta=0,12$ $\lambda=5$	<u>0,02034</u> 0,01623	<u>0,03632</u> 0	<u>0,06102</u> 0,06769	<u>0,06398</u> 0,05731	<u>0</u> 0,04090	<u>0</u> -0,04090
$\alpha=0,5$ $\beta=0,75$ $\lambda=2$	<u>0,03153</u> 0,01775	<u>0,08940</u> 0	<u>0,02488</u> 0,05849	<u>0,10032</u> 0,06651	<u>0</u> 0,06218	<u>0</u> -0,05218
$\alpha=0,5$ $\beta=\infty$ $\lambda=0$	<u>0,03906</u> 0,01823	<u>0,125</u> 0	<u>0</u> 0,05556	<u>0,125</u> 0,06944	<u>0</u> 0,05556	<u>0</u> -0,05556

Примечание. Над чертой — при наличии торцевой панели, под чертой — без нее.

3.3.2. Энергетический метод. Принцип минимума потенциальной энергии (потенциала упругости) $\Pi = W + U + V$ был выведен в общих чертах в п. 2.3.2, это справедливо также и для балок с толстыми внешними слоями (см. 2.101). Если к вариационной задаче $\Pi = \min$ применить уравнения Эйлера (2.105), то для W и τ получаются два связанных дифференциальных уравнения, которые после незначительных преобразований совпадают с уже известными уравнениями (3.17). Принцип минимума потенциальной энергии и при многослойных балках с толстыми внешними слоями дает те же самые результаты, что и условия равновесия.

Если для нахождения приближенных решений для многослойных балок с толстыми внешними слоями применить метод Ритца, то соответственно справедливо рассуждение, приведенное в п. 2.3.2.

Выбираем для W и τ выражения вида (2.106) или (2.107), подставляем их в формулу для Π и минимизируем Π относительно неизвестных постоянных $a_j, b_j, \dots$ ($j = 1, 2, \dots$). Выбранные функции сравнений W_j и τ_j в случае многослойных балок с толстыми внеш-

ними слоями на каждом конце балки, согласно табл. 3.1, должны выполнять три граничных условия¹. Приведем два примера.

а) Многослойная балка в соответствии с рис. 6 (двустороннее шарнирное опирание, отсутствие торцевой панели). Выражение (2.111) выполняет все граничные условия в соответствии с табл. 3.1; его можно также использовать для многослойных балок с толстыми внешними слоями.

б) Многослойная балка в соответствии с рис. 8 (левостороннее закрепление с торцевой панелью, справа — шарнирная опора баз торцевой панели). Одночленное выражение (2.113) удовлетворяет уже всем граничным условиям согласно табл. 3.1, кроме $\gamma(0) = w'(0) = 0$. Если их выполнить, то после переименования постоянных² следует, что

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= a_1(3l^2x^2 - 5lx^3 + 2x^4), \\ \gamma_1 &= (2b_1 + 3c_1)lx^2 - b_1lx^3 - c_1x^4. \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

3.4. ДРУГИЕ ВИДЫ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

3.4.1. Температурный скачок между внешними слоями многослойной балки. Общие положения. В многослойных балках при больших разностях температур между внешними слоями возникают деформации изгиба и напряженные состояния балки. Если разложить температурные деформации в поперечном сечении многослойной балки согласно рис. 22, то возникают:

равномерные температурные деформации

$$\alpha_{ts} T_s = \frac{\alpha_u}{\alpha} \alpha_{to} T_o + \frac{\alpha_o}{\alpha} \alpha_{tu} T_u$$

обоих внешних слоев, которые вызывают только удлинение или укорачивание оси балки и далее интереса не представляют:

скачок температурного расширения

$$\alpha_{tu} T_u - \alpha_{to} T_o = \alpha v^2$$

между обеими осями центра тяжести внешних слоев [сокращение v^2 в соответствии с уравнениями (2.121)], влияние которого будет рассмотрено ниже;

разности температурных деформаций:

$$\alpha_{tu} \Delta T_u, \quad \alpha_{to} \Delta T_o$$

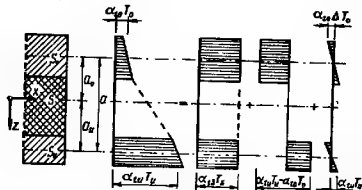
в пределах нижнего и верхнего внешних слоев между соответственно внутренней и внешней поверхностями внешнего слоя, которые здесь также остаются без внимания, так как внешние слои в большинстве случаев — металлические, т.е. обладают хорошей теплопроводностью, и, кроме того, часто более тонкие по сравнению со средним слоем; следовательно, $\alpha_{tu} \Delta T_u \ll \alpha v^2$, $\alpha_{to} \Delta T_o \ll \alpha v^2$.

Дифференциальные уравнения. Если отношения "частичное сдвигающее усилие — деформация" (3.24) дополнить (см. п. 2.4.1) членом, учи-

¹ В случае многослойных балок с тонкими внешними слоями — только два.

² b_1 переименовывается в a_1 , $-c_1$ — в b_1 и $-a_1$ — в c_1 .

Рис. 22. Ход температурных деформаций по высоте сечения



тывающим воздействия температуры, то аналогично уравнению (2.123) находим:

$$M_s = B_s(\gamma' - w'' - \vartheta); \quad Q_s = A\gamma. \quad (3.48)$$

M_u , M_o , Q_u и Q_o остаются неизменными. Общие сдвигающие усилия M и Q в соответствии с уравнениями (3.23) принимают вид:

$$M = B_s(\gamma' - \vartheta) - Bw'', \quad Q = A\gamma - (B_u + B_o)w'''. \quad (3.49)$$

Подстановкой в условия равновесия (2.24) при $q = 0$ получаем:

$$B_s(\gamma'' - w''' - \vartheta') - A\gamma' = 0; \quad A\gamma' - (B_u + B_o)w'' + Nw'' = 0. \quad (3.50)$$

Расчленив оба дифференциальных уравнения (3.50), получаем:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{B_u + B_o}{A}w'' + \left(\frac{B}{B_s} + \frac{N}{A}\right)w'' - \frac{N}{B_s}w'' &= -\vartheta''; \\ -\frac{B_u + B_o}{A}\gamma'' + \left(\frac{B}{B_s} + \frac{N}{A}\right)\gamma'' - \frac{N}{B_s}\gamma'' &= -\frac{B_u + B_o}{A}\vartheta' + \frac{N}{A}\vartheta'. \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

Это и есть искомые дифференциальные уравнения для w и γ ; их решения выполняют и нерасчлененные дифференциальные уравнения (3.50). В особом случае при $N = 0$ и статически определенном опирании ($M = 0$, $Q = 0$) уравнения (3.51) упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{B_u + B_o}{A}w'' + \frac{B}{B_s}w'' &= -\vartheta''; \\ -\frac{B_u + B_o}{A}\gamma'' + \frac{B}{B_s}\gamma'' &= -\frac{B_u + B_o}{A}\vartheta'. \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

Пример: многослойная балка без торцевой панели, шарнирно-опертая по двум сторонам ($N = 0$, $\vartheta = \text{const}$). Вследствие статической определенности системы можно исходить из уравнений (3.52). С помощью сокращений α , β и λ^2 в соответствии с уравнениями (3.27) уравнения (3.52) дают общие решения:

$$\left. \begin{aligned} w &= C_1 \cosh \frac{\lambda x}{l} + C_2 \sinh \frac{\lambda x}{l} + C_3 + C_4 x - \frac{\vartheta}{2(1+\alpha)}x^2; \\ \gamma &= D_1 \cosh \frac{\lambda x}{l} + D_2 \sinh \frac{\lambda x}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

где, как и в п. 3.2.1, между D_1, D_2 и C_1 и C_2 возникают зависимости:

$$D_1 = \frac{(1+\alpha)\lambda}{l} C_2; \quad D_2 = \frac{(1+\alpha)\lambda}{l} C_1.$$

С помощью граничных условий $w(0)=0$, $w'(0)=0$, $w(l)=0$, $w'(l)=0$ получаем из уравнений (3.53) постоянные интегрирования:

$$C_1 = -C_2 = \frac{\vartheta l^2}{(1+\alpha)\lambda^2}; \quad C_2 = -\frac{\vartheta l^2}{(1+\alpha)\lambda^2} \frac{\cosh \lambda - 1}{\sinh \lambda}; \quad C_3 = \frac{\vartheta l}{2(1+\alpha)}.$$

Подстановка этих постоянных в уравнения (3.53) при $\xi = x/l$ после некоторых преобразований дает следующие деформации многослойной балки:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\vartheta l^2}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2} \xi(1-\xi) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\cosh \lambda/2 - \cosh \lambda(1-2\xi)/2}{\cosh \lambda/2} \right]; \\ \gamma &= -\frac{\vartheta l}{\lambda} \frac{\sinh \lambda(1-2\xi)/2}{\cosh \lambda/2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Частичные сдвигающие усилия многослойной балки определяются из уравнений (3.48) и (3.24) с использованием уравнений (3.54) и сокращений (3.37) и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} M_s &= -\frac{\alpha \vartheta B_s}{1+\alpha} \frac{\cosh \lambda/2 - \cosh \lambda(1-2\xi)/2}{\cosh \lambda/2}; \\ M_{u,0} &= +\frac{\alpha_{u,0} \vartheta B_s}{1+\alpha} \frac{\cosh \lambda/2 - \cosh \lambda(1-2\xi)/2}{\cosh \lambda/2}; \\ Q_s &= -\frac{\vartheta B_s}{\beta \lambda l} \frac{\sinh \lambda(1-2\xi)/2}{\cosh \lambda/2}; \\ Q_{u,0} &= +\frac{\alpha_{u,0} \vartheta B_s}{\alpha \beta \lambda l} \frac{\sinh \lambda(1-2\xi)/2}{\cosh \lambda/2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

Предельный случай $B_u = B_o = 0$, а следовательно, $\alpha_u = \alpha_o = \alpha = 0$ и $\lambda = \infty$ дает отношения (2.127).

3.4.2. Поперечные колебания многослойной балки. Дифференциальные уравнения. Основные динамические уравнения поперечных колебаний многослойной балки получаются добавлением силы инерции отношения (3.17):

$$\left. \begin{aligned} B_s(\gamma'' - w'') - A\gamma &= 0; \\ A\gamma' + Nw'' - (B_u + B_o)w''' - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -q. \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

Расчленением частных дифференциальных уравнений получим:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{B_u + B_o}{A} w'' + \left(\frac{B_u + N}{B_s + A} \right) w'' - \frac{N}{B_s} w''' - \frac{\mu}{A} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\mu}{B_s} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= +\frac{q}{B_s} - \frac{q''}{A}; \\ -\frac{B_u + B_o}{A} \gamma'' + \left(\frac{B_u + N}{B_s + A} \right) \gamma'' - \frac{N}{B_s} \gamma''' - \frac{\mu}{A} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} + \frac{\mu}{B_s} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} &= -\frac{q''}{A} \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

Если в уравнения (3.56) и (3.57) подставить $q(x, t)$ в соответствии с уравнением (2.13В), а также $w(x, t)$ в соответствии с уравнениями (2.139), то приравняв коэффициенты в $\sin \omega t$ получаются дифференциальные уравнения для незатухающих вынужденных поперечных колебаний многослойной балки в установившемся режиме. Так как время t в них исключено, то они являются обычными уравнениями и отличаются от дифференциальных уравнений (2.140) для многослойной балки с тонкими внешними слоями только дополнительными членами, возникающими от собственной жесткости B_u и B_o внешних слоев на изгиб. Если учесть и внутреннее затухание среднего слоя (затухание сдвига), то это, как и в п. 2.4.2, можно определить введением комплексной жесткости на сдвиг $2\mathcal{L}$ согласно уравнению (2.146). Тогда и для q , w и τ в уравнения (3.57) необходимо ввести комплексные выражения согласно уравнениям (2.145).

Если в уравнения (3.56) и (3.57) подставить $q(x, t) = 0$, а также $W(x, t)$ и $\tau(x, t)$ согласно уравнениям (2.147), то получим дифференциальные уравнения для незатухающих свободных поперечных колебаний многослойной балки. Это обычные уравнения, которые отличаются от уравнений (2.14В) только дополнительными членами, возникающими от B_u и B_o . Уравнение значений для расчета собственных частот ω_j получается из них с помощью граничных условий балки.

Приближенные решения для ω_j . При свободных колебаниях многослойной балки с толстыми внешними слоями без упругих опор вариационная задача H^* — экстремум, вытекающая из принципа Гамильтона, принимает форму уравнения (2.152), как и при многослойных балках с тонкими внешними слоями. При этом значение E^* идентично уравнению (2.155), а значение W^* следует из уравнения (3.46) и по сравнению с W^* , согласно уравнению (2.153), содержит еще один дополнительный член, возникающий от B_u и B_o :

$$W^* = \frac{1}{2} \int_{(I)} B_o (z_1' - z_2')^2 dx + \frac{1}{2} \int_{(I)} (B_u + B_o) z_2'^2 dx + \frac{1}{2} \int_{(II)} A z_2'^2 dx. \quad (3.58)$$

Вариационная задача (2.152) может быть использована для приближенного расчета первой собственной частоты ω_1 , так что для z_1 и z_2 , согласно способу Ритца, вместо точных (неизвестных) собственных функций туда вводятся подходящие одночленные функции сравнений, например, в виде выражений (2.106) и (2.107) для $j = 1$ и H^* минимизируется по свободным постоянным. При многослойных балках с толстыми внешними слоями не рекомендуется выбирать статические деформации $w_{st}(x)$ и $\tau_{st}(x)$ в качестве приближения к первым собственным функциям (в противоположность п. 2.4.2), так как вычислительные затраты при этом слишком велики. Подробности относительно приближенного расчета ω_1 здесь не рассматриваются; для данного случая справедливо все то, что было сказано в п. 2.4.2.

Пример: многослойная балка без торцовых панелей, шарнирно-опертая по двум сторонам. Для многослойной балки с таким опиранием (см. на рис. 8) с толстыми внешними слоями без действия продольного усилия, согласно табл. 3.1, справедливы следующие граничные условия: $w(0) = 0$; $w''(0) = 0$; $\tau'(0) = 0$; $w(l) = 0$; $w''(l) = 0$; $\tau'(l) = 0$. С помощью выражений перемещений¹:

¹ Они соответствуют выражениям (2.147), если туда ввести $z_1 = \sin j\pi x/l$ и $z_2 = \cos j\pi x/l$

$$w(x, t) = \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \omega_j t; \quad \gamma(x, t) = \cos \frac{j\pi x}{l} \sin \omega_j t \quad (3.59)$$

сразу выполняются все граничные условия; кроме того, они удовлетворяют также дифференциальным уравнениям (3.57) для $N = 0$ и $q = 0$. Подстановка уравнений (3.59) в (3.57) с базразмерными сокращениями α и β в соответствии с уравнениями (3.27) после краткого расчета дает

$$\omega_j^2 = \frac{B_s}{\mu l^4} \frac{j^4 \pi^4 (1 + \alpha + j^2 \pi^2 \alpha \beta)}{1 + j^2 \pi^2 \beta} \quad (3.60)$$

Особый случай $\alpha = 0$ и $i = 1$ дает для первой собственной частоты ω_1 многослойной балки с тонкими внешними слоями уже известное отношение (2.172).

3.4.3. Ползучесть среднего слоя. Дифференциальные уравнения. Относительно ползучести среднего слоя многослойной балки уже было сказано в п. 2.4.3. Основные дифференциальные уравнения получаются в результате того, что при составлении отношений "сдвигающие усилия — деформации" вместо уравнения (3.4) используется τ согласно (2.185); аналогично уравнениям (3.16) получаем:

$$M = B_s \tau' - B_w w''; \quad Q = A \left(\tau - e^{-\psi} \int_0^x \tau e^{\psi} d\psi \right) - (B_u + B_o) w'. \quad (3.61)$$

Уравнения для w и τ получаются подстановкой уравнений (3.61) в условия равновесия (2.24):

$$\left. \begin{aligned} B_s (\tau'' - w''') - A \left(\tau - e^{-\psi} \int_0^x \tau e^{\psi} d\psi \right)' &= 0; \\ A \left(\tau' - e^{-\psi} \int_0^x \tau' e^{\psi} d\psi \right) + N w'' - (B_u + B_o) w' &= -q. \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

Отношения (3.62) соответствуют дифференциальным уравнениям (3.17) для случая неползучего среднего слоя. Расчленение уравнений (3.62) возможно, но в данном случае это не показано.

Статически определяемые многослойные балки. При статически определяемых многослойных балках можно исходить из отношений (3.61), так как сдвигающие усилия M и Q заранее известны. Перераспределения M и Q на другие части балки во время процесса ползучести не возникает. Расчет многослойных балок с толстыми внешними слоями сложнее, чем таких же балок с тонкими внешними слоями, так как первые внутренне статически неопределимы (см. п. 3.1.4). Поэтому во время процесса ползучести происходят перемещения частичных сдвигающих усилий внутри каждого поперечного сечения балки таким образом, что M_s и Q_s уменьшаются; а M_u , M_o , Q_u , Q_o увеличиваются. При этом, предполагая постоянную по времени внешнюю длительную нагрузку q , суммы M_s , M_u и M_o , а также Q_s , Q_u и Q_o соответственно остаются постоянными, а именно, согласно уравнениям (3.23), равны M и Q .

Процесс расчета поясним на примере.

Рассмотрим многослойную балку с двусторонним шарнирным опиранием, согласно рис. 6, без торцовых панелей под действием синусоидальной поперечной нагрузки

$$q(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{l} = q_0 \sin \pi \xi.$$

Из уравнений (2.24) при $N=0$ получаем следующие уравнения срезающих нагрузок:

$$M = \frac{q_0 l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l}; \quad Q = \frac{q_0 l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l}. \quad (3.63)$$

Для w и γ выбираются выражения:

$$w(x, \varphi) = Z_1(\varphi) \sin \frac{\pi x}{l}; \quad \gamma(x, \varphi) = Z_2(\varphi) \cos \frac{\pi x}{l}, \quad (3.64)$$

удовлетворяющие все граничные условия многослойной белки. Подстановка уравнений (3.63) и (3.64) в отношения (3.61), приравняв коэффициенты $\beta \sin \pi x/l$ и $\cos \pi x/l$, а также введение безразмерных величин α и β в соответствии с (3.27) дают для Z_1 и Z_2 следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (1+\alpha) Z_1 - \frac{1}{\pi} Z_2 &= \frac{q_0 l^3}{\pi^3 B_s}; \\ \alpha Z_1 + \frac{1}{\pi^2 \beta} \left(Z_2 - e^{-\varphi} \int_0^{\varphi} Z_2 e^{\psi} d\psi \right) &= \frac{q_0 l^3}{\pi^3 B_s}. \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

Исключением Z_1 из уравнений (3.65) получаем интегральное уравнение для Z_2

$$[1 + \alpha(1 + \pi^2 \beta)] Z_2 - (1 + \alpha) e^{-\varphi} \int_0^{\varphi} Z_2 e^{\psi} d\psi = \frac{q_0 l^3}{\pi^3 B_s} \pi^2 \beta, \quad (3.66)$$

а отсюда после умножения на e^{φ} , дифференцирования и умножения на $e^{-\varphi}$ — уже дифференциальное уравнение

$$[1 + \alpha(1 + \pi^2 \beta)] Z_2' + \pi^2 \alpha \beta Z_2 = \frac{q_0 l^3}{\pi^3 B_s} \pi^2 \beta.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения для Z_2 содержит произвольную постоянную, которую можно определить подстановкой в интегральное уравнение (3.66). Z_1 легко выводится из Z_2 с помощью первого отношения (3.65). Посредством базисных сокращений:

$$x_1 = \frac{1}{1 + \alpha(1 + \pi^2 \beta)}; \quad x_2 = \pi^2 \alpha \beta x_1, \quad (3.67)$$

а также подстановкой Z_1 и Z_2 в уравнения (3.64) получаем следующие уравнения для деформаций:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{q_0 l^4}{\pi^2 B_s} \frac{1}{\alpha} [1 - x_1 e^{-x_2 \varphi}] \sin \pi \xi; \\ \gamma &= \frac{q_0 l^3}{\pi^3 B_s} \frac{1}{\alpha} [1 - (1 + \alpha) x_1 e^{-x_2 \varphi}] \cos \pi \xi. \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

Теперь, подставляя уравнения (3.68) в (3.24), можно рассчитать частичные сдвигающие усилия. С учетом α_u и α_s , согласно (3.37), получаем:

$$\left. \begin{aligned} M_s &= \frac{q_0 l^2}{\pi^2} \alpha, e^{-\alpha_0 \varphi} \sin \pi \xi; \\ M_{s,0} &= \frac{q_0 l^2}{\pi^2} \frac{\alpha_{s,0}}{\alpha} (1 - \alpha, e^{-\alpha_0 \varphi}) \sin \pi \xi; \\ Q_s &= \frac{q_0 l}{\pi} \alpha, e^{-\alpha_0 \varphi} \cos \pi \xi; \\ Q_{s,0} &= \frac{q_0 l}{\pi} \frac{\alpha_{s,0}}{\alpha} (1 - \alpha, e^{-\alpha_0 \varphi}) \cos \pi \xi. \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

Предельные случаи.

$\varphi = 0$. Все статические величины, согласно уравнениям (3.68) и (3.69), вследствие $e^{-\alpha_0 \varphi} = 1$ становятся независимыми от φ . Решения этих уравнений аналогичны решениям для заданной нагрузки и из отношений (3.20):

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{q_0 l^4}{\pi^2 B_s} (1 + \pi^2 \beta) \alpha, \sin \pi \xi; \quad \gamma = \frac{q_0 l^3}{\pi^2 B_s} \pi^2 \beta \alpha, \cos \pi \xi; \\ M_s &= \frac{q_0 l^2}{\pi^2} \alpha, \sin \pi \xi; \quad M_{s,0} = \frac{q_0 l^2}{\pi^2} \alpha_{s,0} (1 + \pi^2 \beta) \alpha, \sin \pi \xi; \\ Q_s &= \frac{q_0 l}{\pi} \alpha, \cos \pi \xi; \quad Q_{s,0} = \frac{q_0 l}{\pi} \alpha_{s,0} (1 + \pi^2 \beta) \alpha, \cos \pi \xi. \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

$\varphi = \infty$. Все статические величины вследствие $e^{-\alpha_0 \varphi} = 0$ независимы от φ , в результате чего получаются одинаковые решения как при $A=0$, т.е. при полностью слабом на сдвиг среднем слое (см. рис. 21,б):

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{q_0 l^4}{\pi^4 (B_u + B_s)} \sin \pi \xi; \quad \gamma = w'; \\ M_s &= 0; \quad M_{s,0} = \frac{\alpha_{s,0}}{\alpha} M; \quad Q = 0; \quad Q_{s,0} = \frac{\alpha_{s,0}}{\alpha} Q. \end{aligned} \right\} \quad (3.71)$$

$\alpha = 0$. Учитывая, что $e^{-\alpha_0 \varphi} = 1 - \alpha, \varphi \pm \dots$, вследствие $\alpha, = 1$, получаются те же решения, что и для заданной нагрузки и из отношений (2.28):

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{q_0 l^4}{\pi^2 B_s} [1 + (1 + \varphi) \pi^2 \beta] \sin \pi \xi; \quad \gamma = \frac{q_0 l^3}{\pi^2 B_s} (1 + \varphi) \pi^2 \beta \cos \pi \xi; \\ M_s &= M; \quad M_{s,0} = 0; \quad Q_s = Q; \quad Q_{s,0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

При $\alpha \neq 0$ с ростом модуля ползучести φ увеличивается перераспределение частичных сдвигающих усилий от несущей способности многослойной балки к собственной несущей способности внешних слоев. При сильном ползучем среднем слое несущая способность многослойной балки с толстыми внешними слоями постепенно теряется.

Примечание. Если вместо поперечной нагрузки $q = q_0 \sin \pi x / l$ на балку действует произвольная нагрузка $q(x)$, то последнюю можно разложить в синусоидальный ряд Фурье с длиной периода $2l$.

*Функции $\sin j\pi x / l$ многослойной балки.

являются собственными функциями для w данной

$$q(x) = \sum_{j=1}^n q_j \sin \frac{j\pi x}{l} \quad (3.73)$$

Для каждого члена ряда можно осуществить расчет в соответствии с прежними объяснениями. Тогда окончательные деформации и сдвигающие усилия получаются наложением всех отдельных расчетов, полученных для членов ряда.

Статически неопределимые многослойные балки. При статически неопределимой многослойной балке с толстыми внешними слоями расчет процесса ползучести довольно сложен, так как здесь имеет место перераспределение частичных сдвигающих усилий внутри поперечного сечения балки (см. п. 3.4.3) и общих сдвигающих усилий на другие части балки (см. п. 2.4.3). Можно действовать аналогично тому, как описано в п. 2.4.3, т.е. создавать статически определимую основную систему и с ее помощью осуществлять все расчеты согласно объяснениям, данным в п. 3.4.3.

3.5. ДОПОЛНЕНИЯ

3.5.1. Жесткость внешних слоев на изгиб при профилированных многослойных конструкциях. В п. 3.1.1 предполагалось, что многослойные

балки имеют плоские толстые внешние слои. Собственная жесткость внешних слоев на изгиб B_u и B_o учитывалась в расчете согласно (3.8), так как толщины внешних слоев t_u и t_o настолько велики, что величинами B_u и B_o по сравнению с жесткостью многослойной балки на изгиб B_s нельзя пренебречь. Но у многих многослойных конструкций внешние слои бывают не ровные, а профилированные (см. табл. 1.1). Таким образом, теория многослойных конструкций, развитая в предыдущих пунктах, должна быть расширена этой темой. Для этого: в B_u и B_o согласно (3.8), вместо моментов собственной инерции в $bt_u^3/12$ и $bt_o^3/12$ плоских внешних покровных слоев подставляются моменты инерции J_u и J_o профилей внешних слоев, отнесенные к соответствующим собственным осям центра тяжести;

в D_u и D_o , согласно (2.16), вместо значений bt_u и bt_o — площади профиля поперечного сечения F_u и F_o внешних слоев.

Следовательно, в то время как при плоских многослойных балках B_u и B_o необходимо учитывать только в случае толстых внешних слоев, при профилированных многослойных балках и тонкие внешние слои дают уже такие большие значения собственной жесткости на изгиб B_u и B_o , что они в любом случае входят в расчет. Приведены два примера.

Внешние слои трапециевидального профиля. При $t \ll h_p$ (толщина листа меньше высоты профиля) собственной жесткостью листа на изгиб можно пренебречь. Согласно рис. 23, расстояния до оси центра тяжести e_u и e_o , жесткость D_i и собственная жесткость на изгиб B_i отдельного элемента трапециевидального гофра внешних слоев равны:

$$\left. \begin{aligned} e_u &= \frac{s_2 + s_3}{s_1 + 2s_2 + s_3} h_p; & e_o &= \frac{s_1 + s_2}{s_1 + 2s_2 + s_3} h_p; \\ D &= Et(s_1 + 2s_2 + s_3); & B_i &= E \frac{th_p^3}{2} \left(\frac{s_1 s_2 + 2s_1 s_3 + s_2 s_3}{s_1 + 2s_2 + s_3} + \frac{s_2}{3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

При $s_3 = s_1$ (симметричный трапецидальный профиль):

$$e_u = e_o = \frac{h_p}{2}; D = 2Et(s_1 + s_2); B = E \frac{th_p^2}{2} \left(s_1 + \frac{s_2}{3} \right). \quad (3.75)$$

На ширину бапки b приходится $n = b/s$ элементов трапецидальной гофры, следовательно,

$$D = nD_1, \quad B = nB_1. \quad (3.76)$$

Примечание. Для очень маленькой величины t/s_3 в (3.74) необходимо вместо s_3 при данных условиях подставить уменьшенное значение s_3^* для совместно несущей ширины сжатого пояса.

Внешние слои в форме цилиндрических сводов-оболочек. При $t \ll h_p$ (толщина листа меньше высоты профиля) собственной жесткостью листа на изгиб можно пренебречь. Согласно рис. 24, получаем следующие значения поперечных сечений:

$$\left. \begin{aligned} h_p &= r(1 - \cos \alpha); \quad z_s = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}; \quad e_u = r \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right); \\ e_o &= r \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right); \quad D = 2Ert\alpha; \quad B = r^3 t \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{2\sin^2 \alpha}{\alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.77)$$

При небольшой высоте профиля, т.е. при небольшом центральном угле α , для значений поперечных сечений h_p , e_u , e_o и B получаются небольшие разности больших чисел, так что их также можно рассчитать с помощью соответствующих разложений в ряд.

3.5.2. Жесткость среднего слоя на сдвиг при профилированных многослойных конструкциях. Жесткость среднего слоя на сдвиг у профилированной многослойной конструкции можно рассчитать достаточным приближением следующим образом. Элемент многослойной балки длиной Δl подвергают действию сдвигающей нагрузки, состоящей из направленных по оси сдвигающих усилий T , действующих в осях центра тяжести внешних слоев, и вертикально направленных поперечных усилий Q , действующих в поперечных сечениях (рис. 25). Между обоими внешними слоями определяют соответствующее относительное смещение u , для чего делят средний слой на вертикальные к z -координатной линии¹ сплошные полоски шириной ds и высотой $h(s)$. Предполагается, что в каждой полоске возникают напряжения сдвига

$$\tau_{xn} = G \gamma_{xn} = G \frac{u}{h(s)}, \quad (3.78)$$

на которые не влияют напряжения и деформации сдвига в соседних полосках. Следовательно, существование напряжений сдвига τ_{xn} , таким образом, исключается². Из уравнений (3.78) при угле сдвига $\gamma = u/a$ следуют:

$$\tau_{xn} = G \frac{a}{h(s)} \gamma; \quad T = \int_{(s)} \tau_{xn} \Delta l ds. \quad (3.79)$$

¹ Она проходит вдоль средней линии поперечного сечения среднего слоя.

² В действительности, т.е. без швов, жесткость сердечника на сдвиг будет несколько больше, чем рассчитано ниже.

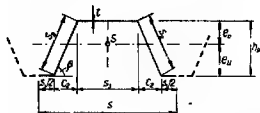


Рис. 23. Трапецидально профилированный внешний слой (элемент трапецидальной гофры)

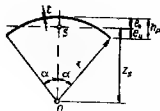


Рис. 24. Внешний слой в форме цилиндрического свода-оболочки

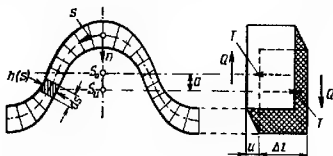


Рис. 25. Поперечное сечение профилированного "сэндвича"

Подстановкой $T = Q \Delta l / a$ в уравнения (3.79) и решением их относительно Q получим:

$$Q = A\gamma; \quad A = G a^2 \int_{(s)} \frac{ds}{h(s)} \quad (3.80)$$

Если к тому же средний слой состоит из конструктивно неоднородного материала, например из сотопласта, то тогда в выражение для A (3.80) вместо модуля сдвига G необходимо ввести идеальный модуль сдвига G_{xz} и G_{yx} , согласно (2.218) и (2.222), эквивалентного однородного среднего слоя. Приведем два примера.

Плоская "сэндвич"-конструкция. При $h = \text{const}$ и $ds = dy$ уравнения (3.80) дают уже знакомое отношение (2.17).

"Сэндвич" трапецидального профиля. Оба трапецидально-профилированных внешних слоя имеют форму и размеры согласно рис. 23 и являются полностью подобными. В области трапецидального пояса толщина сердечника равна h , а в вертикальных стенках трапеции $h \cos \beta$. При $\cos \beta = c_2/s_2$ уравнения (3.80) приобретают вид

$$A = G \frac{a^2}{h} \left(s_1 + s_3 + 2 \frac{s_2^2}{c_2} \right). \quad (3.81)$$

Предельный случай $\beta = 0$, т.е. $s_2 = c_2$ при $s_1 + s_3 + 2s_2 = b$, снова дает отношение (2.17) для ровных многослойных балок.

3.5.3. Переменные значения поперечного сечения. При переменных значениях поперечного сечения $B_s(x)$, $B_u(x)$, $B_o(x)$ и $A(x)$ среднее уравнение из отношений (3.16) для M остается в силе, в то время как для Q справедливо выражение

$$Q = A\gamma - [(B_u + B_o)w']'. \quad (3.82)$$

Расчленение обоих отношений, содержащих w и v , дает каждое по одному дифференциальному уравнению четвертого порядка для w и v с переменными коэффициентами; для постоянных значений поперечного сечения они переходят в отношения (3.20). Точное решение этих дифференциальных уравнений в большинстве случаев невозможно, поэтому в данном случае возможны лишь приближенные методы.

4. КРУЧЕНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОК

4.1. Кручение без бимомента многослойных балок с плоскими тонкими внешними слоями. **4.1.1. Предпосылки.** В главе приводится расчет деформаций при кручении и напряжений сдвига многослойных балок с плоскими тонкими внешними слоями, на которые действует кручение без бимомента. Кроме предпосылок, рассмотренных в п.2.1.1, здесь справедливы и другие допущения.

а) Внешние и средний слои состоят из линейно-упругих материалов.

б) Внешние слои плоские, параллельные один другому и настолько тонкие, что их собственную жесткость при кручении можно не учитывать. Следовательно, предполагается равномерно распределенная по толщине внешних слоев передача усилий сдвига.

в) Средний слой однородный и по сравнению с внешними настолько мягкий, что его жесткость на сдвиг при деформациях сдвига τ_{xyK} по сравнению с жесткостью внешних слоев деформациях на сдвиг τ_{xyD} можно не учитывать. Внешние слои поэтому воспринимают на себя все напряжения сдвига τ_{xy} , в то время как в среднем слое последние возникают $\tau_{xyK} = \tau_{xyD} \approx 0$.

В противоположность этому при сдвиговых деформациях γ_{xxK} жесткостью среднего слоя на сдвиг пренебречь нельзя. Поэтому в среднем слое возникают напряжения сдвига $\tau_{xxK} = \tau_{xxD}$, которые вместе с напряжениями сдвига $\tau_{xyD} = \tau_{xyK}$ во внешних слоях способствуют передаче усилий сдвига по всему поперечному сечению "сэндвича" (см. рис. 26).

г) Кручение происходит без бимомента (свободное кручение); при этом обеспечивается:

сохранение формы поперечного сечения многослойной балки после деформации;

беспрепятственная возможность деформации поперечного сечения внешних слоев на опорах;

постоянное поперечное сечение многослойной балки;

постоянный момент кручения многослойной балки.

Затем как во внешних слоях, так и в среднем слое нормальные напряжения не возникают, а возникают только сдвигающие напряжения. Вызванные последними деформации поперечного сечения не зависят от расстояния от опоры.

д) Предполагается наличие достаточно малых деформаций (линейная теория многослойных конструкций).

В п. 4.1 для сокращения в обозначениях формул опускаются различные индексы, например τ_{xz} , γ_{xz} , τ_{xy} , γ_{xy} , вместо соответствующих τ_{xxK} , γ_{xxK} , τ_{xyD} , γ_{xyD} .

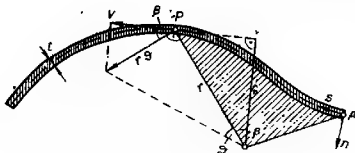


Рис. 27. Скручивание тонкостенного поперечного сечения вокруг 0

был равен нулю¹. Затем с помощью касательных напряжений среднего слоя $\tau_{xy}(y) = \tau_{yx}(y)$ можно рассчитать также и касательные напряжения внешних слоев $\tau_{xy}(y) = \tau_{yx}(y)$, а условия равновесия $\sum M_x(0) = 0$ общего поперечного сечения дают наконец соответствующий момент кручения M_z .

П р и м е ч а н и е. Начало координат многослойной балки отсчитывается от оси симметрии поперечного сечения, расстояние от оси роли не играет.

Искажение поперечного сечения вследствие кручения вокруг 0. Предположим, что открытый тонкостенный стержень произвольной формы скручивается без бимоента вокруг поворотной оси, проходящей через 0. Если взять произвольное, вращающееся вокруг угла ϑ поперечное сечение этого стержня и на средней плоскости этого поперечного сечения нанести произвольную точку P (рис. 27), то эта точка выполняет тангенциальное смещение v и осевое смещение (депланацию) u . Из рис. 27 определяем значение

$$v = r\vartheta \cos \beta = r \cos \beta \vartheta = r_n \vartheta. \quad (4.1)$$

Величина u находится из условия, что средняя плоскость открытых тонкостенных поперечных сечений стержня под действием кручения не претерпевает деформаций сдвига γ_{xs} :

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (4.2)$$

Подстановка уравнения (4.1) в (4.2) и решение относительно u дает выражение

$$u = - \int_{s_A}^s \frac{\partial v}{\partial x} ds = -D\omega(s), \quad (4.3)$$

где

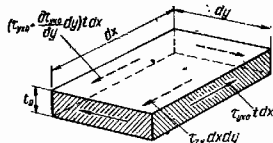
$$D = \frac{dv}{dx} \quad (4.4)$$

означает скручивание стержня, а

$$\omega(s) = \int_{s_A}^s r_n ds = 2 F_{оп} \quad (4.5)$$

¹ Пары касательных напряжений соответствуют в строительной статике статически неопределимым величинам; они должны создавать из открытых тонкостенных поперечных сечений, согласно рис. 26, замкнутое тонкостенное поперечное сечение.

Рис. 28. Элемент внешнего слоя



единичную деформацию поперечного сечения¹, отнесенную к начальной точке A интегрирования. Она равна двойной площади сектора OAP .

Формула (4.3) должна применяться к представленным на рис. 26 частичным элементам многослойной балки, которые имеют открытое тонкостенное поперечное сечение. Если начальные точки интегрирования A_0 и A_u обоих элементов наложить на ось z , являющейся осью симметрии всего поперечного сечения, то в точках B_0 , C_0 и B_u , C_u получим следующие деформации:

$$\left. \begin{aligned} u_{B_0} &= -2Da_0y; & u_{C_0} &= +2Da_0y; \\ u_{B_u} &= +2Da_u y; & u_{C_u} &= -2Da_u y. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Скачки осевых смещений между двумя частями горизонтального сечения через пластины среднего слоя определяются с помощью уравнений (4.6) и $a_u + a_0 = a$:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_B &= u_{B_u} - u_{B_0} = +2Da y; \\ \Delta u_C &= u_{C_u} - u_{C_0} = -2Da y. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Следовательно, Δu_B и Δu_C противоположно равны, что является следствием симметрии поперечного сечения к оси z .

Искажение поперечного сечения вследствие пары касательных напряжений в зазорах. Для того чтобы исключить зазоры в элементарных пластинках среднего слоя в точках B и C , в горизонтальных плоскостях сечений (см. рис. 26) прилагаются противоположно равные пары касательных напряжений² заранее неизвестной величины τ_{zx} . На основе теоремы о касательных напряжениях касательное напряжение τ_{zx} площади поперечного сечения среднего слоя имеет следствием также касательное напряжение τ_{xz} , которые в исходных точках пластин среднего слоя на внешних слоях снова превращаются в касательные напряжения внешних слоев τ_{xy} . Между τ_{xz} и τ_{xy} из условий равновесия $\sum P_x = 0$ для элемента верхнего внешнего слоя, согласно рис. 28, получается отношение

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy t_0 dx + \tau_{zx} dx dy = 0.$$

¹ Это означает осевое смещение для отрицательного единичного скручивания $D = -1$.

² В строительной статике они соответствуют антисимметричной группе сдвигающих нагрузок.

Соответствующее отношение получается и для τ_{yxi} в нижнем внешнем слое. При $\tau_{yi} = \tau_{xy}$ и $\tau_{xi} = \tau_{xz}$ интегрированием по y , с учетом граничного условия $\tau_{xy}(y=b/2)=0$, получаем

$$\tau_{xui,0}(y) = \frac{1}{t_{u,0}} \int_y^{b/2} \tau_{xy}(y) dy. \quad (4.8)$$

В результате касательных напряжений τ_{xz} и τ_{xy} возникают деформации сдвига γ_{xz} и γ_{xy} пластин среднего слоя и соответственно внешних слоев, на основе которых устанавливаются осевые смещения в B_o , C_o , B_u и C_u . Например, для точки B_o получаем

$$\bar{u}_{B_o} = \int_0^y \gamma_{xy} dy + \int_{-h_o}^0 \gamma_{xz} dz. \quad (4.9)$$

Для угла сдвига во внешних слоях справедливо выражение

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (4.10)$$

а для угла сдвига в пластинах среднего слоя —

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G_K}. \quad (4.11)$$

Подставив уравнения (4.10), (4.11) и отношение (4.8) в уравнение (4.9), получим

$$\bar{u}_{B_o} = + \frac{1}{G t_o} \int_0^y \left(\int_y^{b/2} \tau_{xz} dy \right) dy + \frac{\tau_{xz} h_o}{G_K}. \quad (4.12)$$

Соответственно в точке B_u

$$\bar{u}_{B_u} = - \frac{1}{G t_u} \int_0^y \left(\int_y^{b/2} \tau_{xz} dy \right) dy - \frac{\tau_{xz} h_u}{G_K}. \quad (4.13)$$

В точках C_o и C_u при использовании условий симметричности

$$\bar{u}_{C_o} = - \bar{u}_{B_u}, \quad \bar{u}_{C_u} = - \bar{u}_{B_o}. \quad (4.14)$$

Скачки осевых смещений между обеими частями горизонтального сечения через пластины среднего слоя получаются из равенств:

$$\Delta \bar{u}_B = \bar{u}_{B_u} - \bar{u}_{B_o}; \quad \Delta \bar{u}_C = \bar{u}_{C_u} - \bar{u}_{C_o} \quad (4.15)$$

при помощи уравнений (4.12) — (4.14) и $h_o + h_u = h$ и принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{u}_B &= \frac{1}{G} \left(\frac{1}{t_u} + \frac{1}{t_o} \right) \int_0^y \left(\int_y^{b/2} \tau_{xz} dy \right) dy - \frac{\tau_{xz} h}{G_K}; \\ \Delta \bar{u}_C &= - \Delta \bar{u}_B. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

$\Delta \bar{u}_B$ и $\Delta \bar{u}_C$, так же как и Δu_B и Δu_C , согласно уравнению (4.7), противоположно равны, что является следствием симметричности поперечного сечения к оси Z .

Исключение зазоров и дифференциальное уравнение для τ_{xz} . Касательные напряжения $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ в пластинах среднего слоя получаются из условий:

$$\Delta u_s + \Delta \bar{u}_s = 0; \quad \Delta u_c + \Delta \bar{u}_c = 0, \quad (4.17)$$

откуда на основании уравнений (4.7), (4.16) и

$$\lambda^2 = \frac{G_K}{G} \frac{t_u + t_o}{h t_u t_o} \quad (4.18)$$

для τ_{xz} следует дифференциальное уравнение

$$\tau_{xz} + \lambda^2 \int_0^y \left(\int_y^{b/2} \tau_{xy} dy \right) dy = \frac{2G_K D_{ay}}{h}. \quad (4.19)$$

Посредством двукратного дифференцирования уравнения (4.19) получаем для τ_{xz} искомое дифференциальное уравнение

$$\tau_{xz}'' - \lambda^2 \tau_{xz} = 0. \quad (4.20)$$

4.1.3. Касательные напряжения и кручение многослойной балки. Решение дифференциального уравнения (4.20) для τ_{xz} имеет вид

$$\tau_{xz} = C_1 \cosh \lambda y + C_2 \sinh y. \quad (4.21)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются подстановкой уравнения (4.21) в интегральное уравнение (4.19), в результате чего получаем соотношение

$$\lambda \left(C_1 \sinh \frac{\lambda b}{2} + C_2 \cosh \frac{\lambda b}{2} \right) y + C_1 = 2 \frac{\alpha G_K}{hG} g D y, \quad (4.22)$$

откуда приравняв коэффициенты y^0 и y^1 следует:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 2 \frac{\alpha G_K}{hG} \frac{GD}{\lambda \cosh \lambda b/2}. \quad (4.23)$$

Подстановка уравнения (4.23) в уравнение (4.21) с учетом уравнения (4.18) дает следующее выражение для касательных напряжений в среднем слое:

$$\tau_{xz} = 2\alpha\lambda \frac{t_u t_o}{t_u + t_o} \frac{\sinh \lambda y}{\cosh \lambda b/2} GD. \quad (4.24)$$

С помощью уравнения (4.24) подстановкой в отношение (4.8) могут быть также определены касательные напряжения во внешних слоях

$$\tau_{xyu,o} = 2\alpha \frac{t_u t_o}{t_u + t_o} \left(1 - \frac{\cosh \lambda y}{\cosh \lambda b/2} \right) GD. \quad (4.25)$$

Теперь, зная касательные напряжения τ_{xz} и τ_{xy} , можно вычислить крутящий момент M_z , относящийся к кручению D :

$$M_z = \int_0^{b/2} \tau_{xz} \alpha dy 2y + \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{xy} t dy \alpha. \quad (4.26)$$

Подставляя уравнения (4.24) и (4.25) и учитывая, что прочность поперечного сечения "сэндвича" при кручении T_s равна:

$$T_s = GJ_{t1} \left(1 - \frac{\tanh \lambda b/2}{\lambda b/2} \right); \quad J_{t1} = 4 \alpha^2 b \frac{t_u t_o}{t_u + t_o}, \quad (4.27)$$

получаем обычное между кручением и крутящим моментом отношение

$$D = \frac{M_t}{T_s}. \quad (4.28)$$

Если вместо кручения D касательные напряжения выразить через крутящий момент M_t , то из уравнений (4.24) и (4.25) с учетом (4.28) и (4.27) получим:

$$\tau_{xz} = \frac{\lambda \sinh \lambda y}{\cosh \lambda b/2 - \frac{\sinh b/2}{\lambda b/2}} \frac{M_t}{2 \alpha b}; \quad (4.29)$$

$$\tau_{xyu,0} = \frac{\cosh \lambda b/2 - \cosh \lambda y}{\cosh \lambda b/2 - \frac{\sinh \lambda b/2}{\lambda b/2}} \frac{M_t}{2 \alpha b t_{u,0}}. \quad (4.30)$$

Для $t_u = t_o \ll \alpha$, т.е. $h \approx \alpha$. $\lambda b/2$

4.1.4. Предельные случаи. Предельный случай $b/h \gg 1$. Для поперечного сечения "сэндвича" при $b/h \gg 1$ (рис. 29,а) и с учетом уравнения (4.18) следует $\lambda b/2 \gg 1$, причем уравнения (4.24), (4.25) и (4.27) непосредственно дают:

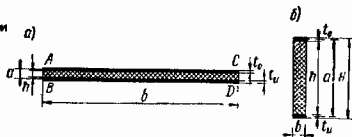
$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \begin{cases} 0 & \text{для } |y| < b/2 \\ \infty & \text{для } y = \pm b/2 \end{cases}; \\ \tau_{xyu,0} &= 2 \alpha \frac{t_{u,0}}{t_u + t_o} G D = \text{const}; \\ T_s &= G J_{t1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

Эти значения соответствуют значениям поперечного сечения полого прямоугольника, горизонтальные стенки AC и BD которого имеют толщину t_u и t_o и модуль сдвига G и чьи вертикальные стенки AB и CD бесконечно тонкие ($t = 0$), но одновременно бесконечно жесткие на сдвиг ($G = \infty$). При необходимости, согласно (4.31), в τ_{xz} и $\tau_{xyu,0}$ кручение D посредством уравнения (4.28) можно заменить крутящим моментом M_t , тогда полученные отношения соответствуют уравнениям (4.29) и (4.30).

Предельный случай $b/h \ll 1$. Для поперечного сечения "сэндвича" при $b/h \rightarrow 0$ (рис. 29,б) посредством уравнения (4.18) следует $\lambda b/2 \rightarrow 0$, причем (4.24), (4.25) и (4.27) с учетом $(\tanh \lambda b/2)/(\lambda b/2) \approx \lambda^2 b^2/12$ дают следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\alpha}{h} 2y G_\kappa D; \\ \tau_{xyu,0} &= \frac{\alpha}{h} \frac{1}{t} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) G_\kappa D; \\ T_s &= \frac{\alpha}{h} G_\kappa \frac{\alpha b^3}{3} \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Рис. 29. Предельные случаи
 $b/h \gg 1$ и $b/h \ll 1$



Эти значения, за исключением фактора a/h (который вследствие $h \approx a$ почти равен единице), соответствуют значениям узкого прямоугольного поперечного сечения со сторонами a и b и модулем сдвига G_K . При необходимости, согласно (4.32), с помощью (4.28) можно заменить в τ_{xz} и $\tau_{xy,0}$ кручение D крутящим моментом M_t . Полученные таким образом отношения соответствуют уравнениям (4.29) и (4.30).

4.2. КРУЧЕНИЕ БЕЗ БИМОМЕНТА МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОК С ПРОФИЛИРОВАННЫМИ ТОНКИМИ ВНЕШНИМИ СЛОЯМИ

4.2.1. Предпосылки. Справедливы те же самые предпосылки, что и в п. 4.1.1, но с одним исключением: внешние слои хотя и тонкие (поэтому их собственной прочностью при кручении можно пренебречь), но не обязательно плоские; они могут быть профилированными или искривленными (см. рис. 30). Изменчивость искривления внешних слоев и толщины среднего слоя с координатой s не должна быть очень большой, так что касательными напряжениями сердечника τ_{xzK} можно пренебречь. Для ясности рассматриваются симметричные к оси A_0M поперечные сечения.

4.2.2. Дифференциальное уравнение. Вывод дифференциального уравнения для качественных напряжений среднего слоя $\tau_{xn}(s)$, вертикального к оси S , а также интегральных отношений для касательных напряжений $\tau_{xy,0}(s)$ внешних слоев осуществляется тем же способом, что и в п. 4.1.2. Аналогично получаем следующие отношения.

а) Сдвиговый скачок Δu_p в точке P вдоль линии координат s рассеченного поперечного сечения "сэндвича" вследствие кручения вокруг M составляет

$$\Delta u_p = D(a r_t + \omega_0 - \omega_u) = 2F_m(s) D, \quad (4.33)$$

причем F_m — заштрихованная на рис. 30 площадь $A_0 B_0 B_u A_u$.

б) Сдвиговый скачок $\Delta \bar{u}_p$ в точке P рассеченного вдоль линии координат s поперечного сечения "сэндвича" вследствие пар касательного напряжения $\tau_{nx} = \tau_{xn}$ в зазорах равен:

$$\Delta \bar{u}_p = -\frac{1}{G} \left(\frac{1}{t_u} + \frac{1}{t_o} \right) \int_0^s \left(\int \tau_{xn} ds \right) ds - \frac{\tau_{xn} h}{G_K}. \quad (4.34)$$

в) Из уравнения условий $\Delta u_p + \Delta \bar{u}_p = 0$ (исключение зазоров в точке P) при λ^2 , согласно уравнению (4.18), получаем для τ_{xn} интегральное уравнение

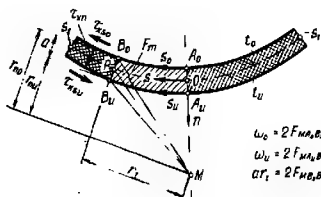


Рис. 30. Поперечное сечение многослойной конструкции с профильными тонкими внешними слоями

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2 F_m s_0, \\ \omega_u &= 2 F_m s_u, \\ \alpha r_0 &= 2 F_m s_0.\end{aligned}$$

$$\tau_{xn} + \lambda^2 \int_0^s \left(\int_s^{s_1} \tau_{xn} ds \right) ds = \frac{2 G_K D F_m(s)}{h}. \quad (4.35)$$

Посредством двухразового дифференцирования уравнения (4.35) по s для τ_{xn} получается дифференциальное уравнение

$$\tau_{xn}'' - \lambda^2 \tau_{xn} = \frac{2 G_K D F_m''(s)}{h}. \quad (4.36)$$

4.2.3. Касательные напряжения и кручение многослойной балки. Касательные напряжения τ_{xn} получаются посредством решения уравнения (4.36) и имеют вид

$$\tau_{xn} = C_1 \cosh \lambda y + C_2 \sinh \lambda y + \tau_{xnpr}, \quad (4.37)$$

где τ_{xnpr} — частный интеграл уравнения (4.36). Определение постоянных интегрирования осуществляется подстановкой в уравнение (4.35). Касательные напряжения внешних слоев τ_{x0}, τ_{xu} , используя τ_{xn} , получаем из отношений, аналогичных уравнению (4.8):

$$\tau_{x0} = \frac{1}{t_0} \int_0^{s_0} \tau_{xn}(s) ds, \quad (4.38)$$

С учетом того, что в точках B_u и B_0 для каждого значения координаты

$$\tau_{x0} t_0 = \tau_{xu} t_u = T_{xs}(s)^* = \int_s^{s_0} \tau_{xn} ds, \quad (4.39)$$

получаем значение крутящего момента

$$M_t = \int_{(s_0)} T_{xs} r_{n0} ds_0 - \int_{(s_u)} T_{xs} r_{nu} ds_u + \int_{(s)} \tau_{xn} \alpha r_0^2 ds.$$

При $r_{n0} ds_0 = d\omega_0$ и $r_{nu} ds_u = d\omega_u$, согласно (4.5), частичным интегрированием двух первых интегралов и с учетом, что передача усилий сдвига T_{xs} по краям внешних слоев исключается, получаем

$$M_t = - \int_{(s)} \omega_0 dT_{xs} + \int_{(s)} \omega_u dT_{xu} + \int_{(s)} \tau_{xn} \alpha r_0^2 ds.$$

* $T_{xs}(s)$ — передача усилий сдвига во внешних слоях.

Используя уравнение (4.38)

$$dT_{xs} = \frac{dT_{xs}}{ds} ds = -\tau_{xn} ds$$

и, кроме того, $\alpha r_t + \omega_\theta - \omega_u = 2F_m$, получаем крутящий момент

$$M_t = 2 \int \tau_{xn} F_m ds. \quad (4.40)$$

Кручение находится⁽⁵⁾ из уравнения (4.28), причем предел прочности при кручении составляет

$$T_s = \frac{2}{D} \int \tau_{xn} F_m ds. \quad (4.41)$$

В особом случае поперечного сечения многослойной конструкции с плоскими внешними слоями из уравнений (4.37), (4.38), (4.41) снова следуют уже знакомые отношения (4.24), (4.25) и (4.27).

4.3. КРУЧЕНИЕ БЕЗ БИМОМЕНТА МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОК С ПЛОСКИМИ ТОЛСТЫМИ ВНЕШНИМИ СЛОЯМИ

4.3.1. Общие положения. Многослойные балки с плоскими толстыми внешними слоями отличаются от подобных же балок с тонкими внешними слоями тем, что собственной прочностью внешних слоев при кручении по сравнению с этой же прочностью всей многослойной балки пренебречь нельзя. Поэтому к касательным напряжениям, согласно п. 4.1 (касательные напряжения вследствие несущей способности многослойной конструкции), прибавляются и касательные напряжения вследствие собственного кручения внешних слоев (рис. 31); следовательно, внешние слои воспринимают определенную часть крутящего момента. Влияние собственных деформаций внешних слоев, вытекающих из собственного кручения внешних слоев, на определенные касательные напряжения среднего слоя τ_{xz} вследствие несущей способности многослойной конструкции остается неучтенным, поэтому для них, как и прежде, справедливы отношения (4.24) и (4.29).

4.3.2. Касательные напряжения и кручение многослойной балки. Так как форма поперечного сечения многослойной балки при кручении предположительно остается неизменной, то в каждой точке x балки как верхнее и нижнее поперечные сечения внешних слоев, так и общее поперечное сечение "сэндвича" испытывают одинаковое кручение D :

$$D = \frac{M_{ts}}{T_s} = \frac{M_{tu}}{T_u} = \frac{M_{to}}{T_o}$$

при T_s согласно уравнению (4.27), а также T_u и T_o согласно (4.45) и табл. 4.1; с другой стороны, для общего крутящего момента M_t справедливо следующее:

$$M_t = M_{ts} + M_{tu} + M_{to}.$$

Решением этого уравнения по частичным крутящим моментам M_{ts} , M_{tu} и M_{to} с помощью общей прочности при кручении

$$T = T_s + T_u + T_o \quad (4.42)$$

получаем отношения:

$$M_{ts} = \frac{T_s}{T} M_t; \quad M_{tu} = \frac{T_u}{T} M_t; \quad M_{to} = \frac{T_o}{T} M_t. \quad (4.43)$$

Следовательно, крутящий момент распределяется пропорционально прочности элементов, составляющих поперечное сечение многослойной конструкции.

Определение касательных напряжений во внешних и средних слоях многослойной балки является теперь очевидным: частичный крутящий момент M_{ts} , обусловленный крутящей способностью "сэндвича", вызывает во внешних слоях касательные напряжения τ_{xytu} и τ_{xyto} согласно (4.30), а также в среднем слое касательные напряжения τ_{xzs} согласно (4.29). В уравнениях (4.30) и (4.29) необходимо только заменить M_t на M_{ts} . Индекс S показывает, что касательные напряжения происходят от чистой несущей способности многослойной конструкции. На τ_{xyt} и τ_{xzs} во внешних слоях вследствие их собственной прочности при кручении накладываются вызванные частичным крутящим моментом M_{tu} и M_{to} касательные напряжения τ_{xytu} и τ_{xyto} согласно (4.45) и табл. 4.1. Индекс T указывает на то, что касательные напряжения возникают от собственного кручения внешних слоев. Следовательно, для общих касательных напряжений справедливы следующие уравнения:

$$\tau_{xyu,o} = \tau_{xyzu,o} + \tau_{xytu,o}; \quad \tau_{xz} = \tau_{xzs}. \quad (4.44)$$

Таблица 4.1. Прочность при кручении и касательные напряжения толстых прямоугольных поперечных сечений

$b/T_{u,o}$	1	1,25	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
h_1	0,141	0,172	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
h_2	4,81	4,52	4,33	4,07	3,74	3,55	3,35	3,26	3,20	3
h_3	1	0,910	0,858	0,796	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

Расчет обусловленных собственным кручением внешних слоев прочностей при кручении и касательных напряжений внешних слоев определяется посредством отношений:

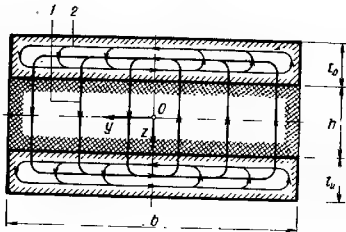
$$\left. \begin{aligned} \tau_{xytu,o} &= h_2 \frac{M_t}{b t_{u,o}^2}; & \tau_{xz} T_{u,o} &= h_3 \tau_{xytu,o}; \\ T_{u,o} &= G J_{tu,o} = h_1 b t_{u,o}^3 G \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

при h_1 , h_2 и h_3 согласно табл. 4.1. Отношения (4.45) справедливы для $b \gg T_{u,o}$; $\tau_{xytu,o}$ — касательное напряжение внешнего слоя в середине обеих прямоугольных широких сторон b , а $\tau_{xz} T_{u,o}$ — касательное напряжение внешнего слоя в середине обеих прямоугольных торцов¹ t_u и t_o . Отношения (4.45) получаются согласно теории Сен-Венана.

¹ Касательное напряжение $\tau_{xz} T_{u,o}$, согласно (4.45), дано только для полноты; в уравнении (4.44) оно не требуется.

Рис. 31. Передача усилий сдвига в поперечном сечении "сэндвича" с толстыми внешними слоями

1 — вследствие несущей способности "сэндвича"; 2 — вследствие собственной несущей способности внешних слоев



4.3.3. Пример: $G_K = G$, $b/H = 1,5$, $t/H = 0,25$. Данный пример представляет собой экстремальный случай для поперечных сечений "сэндвича". Средний слой обладает таким же большим модулем сдвига $G_K \approx G$, как и внешние слои. Следовательно, речь идет об однородном прямоугольном поперечном сечении со сторонами H и $b = 1,5H$. Согласно (4.45) и в соответствии с табл. 4.1, для прочности при кручении и касательных напряжениях получим точные значения:

$$\tau_{xy} = \frac{4,33 M_t}{1,5 H \cdot H^2} = 2,89 \frac{M_t}{H^3}; \quad \tau_{xz} = 0,858 \cdot 2,89 \frac{M_t}{H^3} = 2,48 \frac{M_t}{H^3};$$

$$T = 0,196 \cdot 1,5 H \cdot H^3 \cdot G = 0,294 G H^4.$$

По сравнению с этим уравнения (4.42) и (4.44) при $\alpha/H = 0,75$, $h/H = 0,5$, $b/t = 6$, $\lambda b/2 = 3$ дают:

$$T_s = 4(0,75 H)^2 \cdot 1,5 H \cdot \frac{0,25 H}{2} \left(1 - \frac{\tanh 3}{3}\right) G = 0,282 G H^4;$$

$$T_{u,0} = 0,299 \cdot 1,5 H (0,25 H)^3 G = 0,007 G H^4;$$

$$T = (0,282 + 2 \cdot 0,007) G H^4 = 0,296 G H^4; \quad M_{ts} = \frac{0,282}{0,296} M_t = 0,953 M_t;$$

$$M_{tu,0} = \frac{0,007}{0,296} M_t = 0,0235 M_t;$$

$$\tau_{xys} = \frac{\cosh 3 - 1}{\cosh 3 - (\sinh 3)/3} \cdot \frac{0,953 M}{2 \cdot 0,75 H \cdot 1,5 H \cdot 0,25 H} = 2,28 \frac{M_t}{H^3};$$

$$\tau_{xyt} = 3,35 \frac{0,0235 M_t}{1,5 H (0,25 H)^2} = 0,84 \frac{M_t}{H^3};$$

$$\tau_{xy} = (2,28 + 0,84) \frac{M_t}{H^3} = 3,12 \frac{M_t}{H^3};$$

$$\tau_{xy} = \frac{3 \sinh 3}{\cosh 3 - (\sinh 3)/3} \cdot \frac{0,953 M_t}{2 \cdot 0,75 H \cdot 1,5 H \cdot 0,25 H} = 2,25 \frac{M_t}{H^3}.$$

Несмотря на экстремально жесткий на сдвиг средний слой ($G_K = G$), для чего, собственно, данная теория многослойных конструкций совершенно не предусмотрена, погрешность прочности при кручении составляет только 0,7%, касательных напряжений в случае $\tau_{xy} - 8\%$, а в случае $\tau_{xz} - 1,6\%$.

5. ИЗГИБ МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ С ПЛОСКИМИ ТОНКИМИ ВНЕШНИМИ СЛОЯМИ

5.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

5.1.1. Предпосылки. Здесь даны расчеты прогибов, сдвигающих усилий и напряжений работающих на изгиб многослойных панелей с плоскими тонкими внешними слоями. Принятые предпосылки расчета, аналогичные рассмотренным в п. 2.1.1, расширены несущими конструкциями, работающими в двух направлениях:

линейно-упругие, ортотропные материалы всех слоев, причем направления x и y являются ортотропными. Для упрощения расчета ограничиваются различия материалов нижнего и верхнего внешних слоев: между соответствующими одна другой постоянными упругости нижнего и верхнего внешних слоев должны быть определенные зависимости [см. уравнения (5.22) и (5.24)]; пример одинакового материала внешних слоев отражен как особый случай;

плоские тонкие параллельные один другому внешние слои, поэтому предполагается наличие в них чисто мембранных напряжений;

однородный и, по сравнению с внешними слоями, мягкий сердечник, поэтому $\sigma_{xK} \approx 0$; $\sigma_{yK} \approx 0$; $\tau_{xxK} = \text{const}$ и $\tau_{yyK} = \text{const}$; сжимаемости многослойных панелей не наблюдается;

опирание многослойной панели по краям, параллельным осям координат (двухмерная несущая конструкция с прямоугольной горизонтальной проекцией);

нагрузка складывается из одновременного воздействия осевого и поперечного усилий (теория второго порядка);

деформации достаточно малы (линейная теория многослойных конструкций).

5.1.2. Дифференциальные уравнения для w , τ_x и τ_{yz} . Общие положения. Вывод частных дифференциальных уравнений для w , τ_{xz} и τ_{yz} осуществляется аналогично п. 2.1.2. Сначала выбирается произвольная базовая плоскость $z = 0$ многослойной панели, расстояние нижнего внешнего слоя от которой составляет a_n , а верхнего внешнего слоя — a_u . В ходе расчета положение базовой относительной плоскости затем устанавливается таким образом, что результаты расчетов принимают как можно более простую форму.

Для более краткой записи частные производные по x в дальнейшем обозначаются штрихом, а частные производные по y — точкой, следовательно:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w'; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = w''.$$

Рис. 1 и 2 с частично измененными индексами действительны также и для данной главы.

Деформации. а) Угол сдвига среднего слоя.

Соответственно отношениям (2.2) и (2.3) между полным и частичным углами сдвига среднего слоя в плоскостях $y = \text{const}$ и $x = \text{const}$ имеются следующие зависимости:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz1} + \gamma_{xz2}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz1} + \gamma_{yz2}. \quad (5.1)$$

Из уравнения (5.1) при

$$\gamma_{xz1} = w', \quad \gamma_{yz1} = w' \quad (5.2)$$

после подстановки сразу же следует

$$\gamma_{xz} = w' + \gamma_{xz2}, \quad \gamma_{yz} = w' + \gamma_{yz2}, \quad (5.3)$$

где γ_{xz} , γ_{xz2} и γ_{yz2} есть угол сдвига, измеренный двумя плоскостями центра тяжести внешних слоев (см. рис. 2).

б) Деформации внешних слоев.

Для деформаций справедливы следующие выражения:

$$\epsilon_x = u', \quad \epsilon_y = v', \quad \gamma_{xy} = u' + v'. \quad (5.4)$$

Для смещений u и v внешних слоев в направлении x и y соответственно уравнению (2.7) получаются отношения:

$$\left. \begin{aligned} u_u &= \bar{u} + \alpha_u \gamma_{xz2}; & u_o &= \bar{u} - \alpha_o \gamma_{xz2}; \\ v_u &= \bar{v} + \alpha_u \gamma_{yz2}; & v_o &= \bar{v} - \alpha_o \gamma_{yz2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Таким образом, подстановкой уравнений (5.5) в (5.4) получаем деформации внешних слоев:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xu} &= \bar{u}' + \alpha_u \gamma_{xz2}' ; & \epsilon_{xo} &= \bar{u}' - \alpha_o \gamma_{xz2}' ; \\ \epsilon_{yu} &= \bar{v}' + \alpha_u \gamma_{yz2}' ; & \epsilon_{yo} &= \bar{v}' - \alpha_o \gamma_{yz2}' ; \\ \gamma_{xyu} &= \bar{u}' + \bar{v}' + \alpha_u (\gamma_{xz2}' + \gamma_{yz2}'); & \gamma_{xyo} &= \bar{u}' - \bar{v}' - \alpha_o (\gamma_{xz2}' + \gamma_{yz2}'). \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Физические законы. Физический закон для деформаций сдвига среднего слоя из ортотропного материала, аналогично уравнению (2.10) выглядит следующим образом:

$$\tau_{xz} = \frac{a}{h} G_{xz} \gamma_{xz}; \quad \tau_{yz} = \frac{a}{h} G_{yz} \gamma_{yz}. \quad (5.7)$$

Физический закон для деформаций внешних слоев, которые могут состоять из различных ортотропных материалов, имеет общий вид:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_y \frac{\sigma_y}{E_y}; \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_x \frac{\sigma_x}{E_x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}. \quad (5.8)$$

Из пяти постоянных упругости E_x, E_y, G_{xy}, ν_x и ν_y только четыре независимы одна от другой, так как между E_x, E_y, ν_x и ν_y имеется следующая зависимость¹:

$$\nu_x E_y = \nu_y E_x. \quad (5.9)$$

Если отношения (5.8) разить согласно напряжениям, то с модифицированными модулями упругости:

$$E'_x = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y}; \quad E'_y = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} \quad (5.10)$$

получим отношения:

$$\sigma_x = E'_x (\varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y); \quad \sigma_y = E'_y (\varepsilon_y + \nu_x \varepsilon_x); \quad \tau_{xy} = G_{xy} \gamma_{xy}, \quad (5.11)$$

которые справедливы как для нижнего внешнего слоя (в дальнейшем дополнительный индекс u), так и для верхнего (дополнительный индекс σ). Как видно из (5.11), при двухмерных многослойных несущих конструкциях постоянно (в противоположность одномерным многослойным балкам, см. п. 3.1.2) необходимо подставлять модифицированные модули упругости в отношении "напряжение — деформация".

Сдвигающие усилия Сдвигающие усилия в качестве равнодействующей поперечного сечения напряжений на единицу ширины представлены на рис. 32 и определяются из следующих отношений:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= \int_{(z)} \sigma_x dz; & n_y &= \int_{(z)} \sigma_y dz; & n_{xy} &= n_{yx} = \int_{(z)} \tau_{xy} dz; \\ m_x &= \int_{(z)} \sigma_x z dz; & m_y &= \int_{(z)} \sigma_y z dz; & m_{xy} &= m_{yx} = \int_{(z)} \tau_{xy} z dz; \\ q_x &= \int_{(z)} \tau_{xy} dz; & q_y &= \int_{(z)} \tau_{yx} dz. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Указанные в уравнениях (5.12) равенства n_{xy} и n_{yx} , а также m_{xy} и m_{yx} вытекают из равенства соотнесенных напряжений сдвига τ_{xy} и τ_{yx} ; относительно ориентации n_{xy} , n_{yx} , m_{xy} и m_{yx} см. рис. 32.

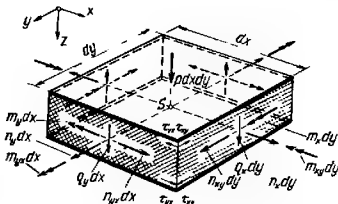
В уравнения (5.12) подставляются напряжения согласно уравнениям (5.11) и (5.7) с деформациями согласно (5.6). При выполнении интегрирования получаются различные характеристики поперечных сечений.

Жесткость внешних слоев при растяжении:

$$\left. \begin{aligned} D_{xu} &= E'_{xu} t_u; & D_{yu} &= E'_{yu} t_u; & D_{x\sigma} &= E'_{x\sigma} t_\sigma; & D_{y\sigma} &= E'_{y\sigma} t_\sigma; \\ D_x &= D_{xu} + D_{x\sigma}; & D_y &= D_{yu} + D_{y\sigma}; \\ D_y &= \nu_{xu} D_{yu} + \nu_{x\sigma} D_{y\sigma}; & D_x &= \nu_{yu} D_{xu} + \nu_{y\sigma} D_{x\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

¹Она вытекает из теоремы Бетти.

Рис. 32. Фрагмент панели с действующими на него сдвигающими усилиями



Статические моменты жесткости внешних слоев на растяжение:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= D_{xu} a_u - D_{xo} a_o; & S_y &= D_{yu} a_u - D_{yo} a_o; \\ S_x &= \nu_{yu} D_{xu} a_u - \nu_{yo} D_{xo} a_o; \\ S_y &= \nu_{xu} D_{yu} a_u - \nu_{xo} D_{yo} a_o. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Жесткость многослойной конструкции на изгиб:

$$\left. \begin{aligned} B_{xs} &= D_{xu} a_u^2 + D_{xo} a_o^2; & B_{ys} &= D_{yu} a_u^2 + D_{yo} a_o^2; \\ B_{xs} &= \nu_{yu} D_{xu} a_u^2 + \nu_{yo} D_{xo} a_o^2; \\ B_{ys} &= \nu_{xu} D_{yu} a_u^2 + \nu_{xo} D_{yo} a_o^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Жесткость внешних слоев при сдвиге:

$$\left. \begin{aligned} A_{xyu} &= G_{xyu} t_u; & A_{xyo} &= G_{xyo} t_o; \\ A_{xy} &= A_{xyu} + A_{xyo}. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Статический момент жесткости внешних слоев на сдвиг:

$$S_{xy} = A_{xy} a_u - A_{xyo} a_o. \quad (5.17)$$

Предел прочности "сэндвича" при кручении:

$$T_{xyz} = A_{xyu} a_u^2 + A_{xyo} a_o^2. \quad (5.18)$$

Жесткость среднего слоя на сдвиг:

$$A_{xz} = G_{xz} \frac{a^2}{h}; \quad A_{yz} = G_{yz} \frac{a^2}{h}. \quad (5.19)$$

С учетом значений поперечных сечений получаем следующие отношения для срезающих нагрузок:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= D_x \ddot{u}' + D_x \ddot{v}'' + S_x \gamma'_{xz2} + S_x \gamma_{yz2}; \\ n_y &= D_y \ddot{v}'' + D_y \ddot{u}' + S_y \gamma'_{yz2} + S_y \gamma_{xz2}; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} n_{xy} &= A_{xy}(\bar{u}' + \bar{v}') + S_{xy} \gamma_{xz2} + \gamma_{yz2}' ; \\ m_x &= S_x \bar{u}' + S_x \bar{v}' + B_{x3} \gamma_{xz2}' + B_{x3} \gamma_{yz2}' ; \\ m_y &= S_y \bar{u}' + S_y \bar{v}' + B_{y3} \gamma_{xz2}' + B_{y3} \gamma_{yz2}' ; \\ m_{xy} &= S_{xy}(\bar{u}' + \bar{v}') + T_{xy3} \gamma_{xz2}' + \gamma_{yz2}' ; \\ q_x &= A_{xz} \gamma_{xz2} ; \quad q_y = A_{yz} \gamma_{yz2} . \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Произведем упрощения такого порядка, чтобы сдвигающие усилия n_x , n_y , n_{xy} зависели только от $\bar{u}$, $\bar{v}$, а не от γ_{xz2} , γ_{yz2} , а сдвигающие моменты m_x , m_y , m_{xy} — от γ_{xz2} , γ_{yz2} , а не от $\bar{u}$, $\bar{v}$.

А. Относительная базовая плоскость $z = 0$ устанавливается таким образом, чтобы $S_x = 0$. При S_x по уравнению (5.14) и $\alpha_u + \alpha_o = \alpha$ аналогично уравнению (2.20) получим:

$$\alpha = \frac{D_{xo}}{D_x} \alpha ; \quad \alpha_o = \frac{D_{xu}}{D_x} \alpha . \quad (5.21)$$

Б. Для того чтобы S_y и S_{xy} были равны нулю, согласно уравнениям (5.10), (5.13), (5.14), (5.16), (5.17) и (5.21) должны выполняться равенства

$$\frac{D_{xu}}{D_{xo}} = \frac{D_{yu}}{D_{yo}} = \frac{A_{xyu}}{A_{xyo}} , \quad \frac{E_{xu}}{E_{xo}} = \frac{E_{yu}}{E_{yo}} = \frac{G_{xyu}}{G_{xyo}} . \quad (5.22)$$

Соотношение соответствующих одна другой постоянных упругости в нижнем и верхних внешних слоях должно быть, следовательно, одним и тем же. Вместо уравнения (5.21) с помощью уравнения (5.22) можно записать, что:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_u &= \frac{D_{xo}}{D_x} \alpha = \frac{D_{yo}}{D_y} \alpha = \frac{A_{xyo}}{A_{xyu}} \alpha ; \\ \alpha_o &= \frac{D_{xu}}{D_x} \alpha = \frac{D_{yu}}{D_y} \alpha = \frac{A_{xyu}}{A_{xyo}} \alpha , \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

где α_u и α_o выражают значение жесткости внешних слоев при растяжении в плоскости, проходящей через центр тяжести.

В. Для того чтобы S_x и S_y были также равны нулю, согласно уравнениям (5.14), (5.21) и (5.22) должно быть:

$$v_{xu} = v_{xo} = v_x ; \quad v_{yu} = v_{yo} = v_y , \quad (5.24)$$

т.е. должны совпадать соответствующие один другому коэффициенты поперечных деформаций в нижнем и верхнем внешних слоях. Если урав-

* Без такого ограничения общности далее (после подстановки отношений "сдвигающее усилие — деформация" в условия равновесия, см. п. 5.1.2) получалось бы вместо истинного напряженного состояния — сложное как для пластины, так и для мембраны с шестью вместо трех величин перемещений.

нения (5.2) — (5.24) подставить в (5.13), (5.15) и (5.18), то получаются следующие характеристики поперечного сечения:
жесткость на растяжение:

$$D_x = \nu_y D_{x0}; \quad D_y = \nu_x D_{y0}; \quad (5.25)$$

жесткость "сэндвича" на изгиб:

$$\left. \begin{aligned} B_{xs} &= \frac{D_{xu} D_{x0}}{D_x} \alpha^2; & B_{ys} &= \frac{D_{yu} D_{y0}}{D_y} \alpha^2; \\ B_{xs} &= \nu_y B_{xs}; & B_{ys} &= \nu_x B_{ys}; \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

предел прочности "сэндвича" при кручении

$$T_{xys} = \frac{A_{xu} A_{yu}}{A_{xy}} \alpha^2. \quad (5.27)$$

На основании уравнений (5.9) и (5.22) можно заключить, что $B_{xs} = B_{ys}$, т.е.

$$\nu_y B_{xs} = \nu_x B_{ys}. \quad (5.28)$$

После подстановки в равенства (5.20) отношений (5.3), решенных относительно γ_{xz} и γ_{yz} , получаются следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= D_x (\bar{u}' + \nu_y \bar{v}'); & n_y &= D_y (\bar{v}' + \nu_x \bar{u}'); \\ n_{xy} &= A_{xy} (\bar{u}' + \bar{v}'); \\ m_x &= B_{xs} [-(u'' + \nu_y u'') + (\gamma'_{xz} + \nu_y \gamma'_{yz})]; \\ m_y &= B_{ys} [-(u'' + \nu_x u'') + (\gamma'_{yz} + \nu_x \gamma'_{xz})]; \\ m_{xy} &= T_{xys} (-2u'' + \gamma'_{xz} + \gamma'_{yz}); \\ q_x &= A_{xx} \gamma_{xz}; & q_y &= A_{yz} \gamma_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Три первых уравнения (5.29) соответствуют чисто мембранному напряженному состоянию, которое здесь подробно не рассматривается, а последние пять уравнений (5.29) соответствуют напряженному состоянию пластинки с деформациями многослойной панели на изгиб и сдвиг.

Условия равновесия фрагмента панели. Так как далее рассматривается только пластинчатое напряженное состояние многослойной панели (изгиб с осевым усилием), то из шести условий равновесия деформированного фрагмента панели интерес представляют только три условия:

$$\left. \begin{aligned} m'_x + m'_{yx} - q_x &= 0; & m'_y + m'_{xy} - q_y &= 0; \\ q_x + q'_y + p + n_x w'' + 2n_{xy} w' + n_y w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

Все сдвигающие усилия наглядно представлены на рис. 32, где они нанесены без приращений на положительных поверхностях пересечений и фрагмент панели представлен в недеформированном виде. Таким обра-

зом, возникающая от n_x , n_y и n_{xy} и содержащаяся в третьем уравнении (5.30) противоположная по знаку сила на рисунке не видна.

Дифференциальные уравнения для w , γ_{xy} и γ_{yz} . Если пять последних уравнений (5.29) подставить в условия равновесия (5.30) и с учетом (5.28) ввести значение поперечного сечения

$$H_s = 2T_{xyS} + \nu_x B_{yS} = 2T_{xyS} + \nu_y B_{xS}, \quad (5.31)$$

то после краткого расчета при условии постоянных значений поперечных сечений (т.е. независимых от x и y) получим:

$$\left. \begin{aligned} -B_{xS} w'' - H_S w'' + B_{xS} \gamma_{xx}'' + T_{xyS} \gamma_{xx}'' - A_{xx} \gamma_{xx} + (H_S - T_{xyS}) \gamma_{yz}'' &= 0; \\ -B_{yS} w'' - H_S w'' + B_{yS} \gamma_{yz}'' + T_{xyS} \gamma_{yz}'' - A_{yz} \gamma_{yz} + (H_S - T_{xyS}) \gamma_{xz}'' &= 0; \\ +A_{xy} \gamma_{xz}' + A_{yz} \gamma_{yz}' + n_x w' + 2n_{xy} w' + n_y w' &= -p. \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

Это частные дифференциальные уравнения для w , γ_{xx} и γ_{yz} при расчете по теории второго порядка. Третье уравнение (5.32) при необходимости можно преобразовать, для чего первое уравнение (5.32) дифференцируется по x , второе по y , затем первое решается относительно $A_{xx} \gamma_{xx}'$, второе — $A_{yz} \gamma_{yz}'$, и результаты подставляются в третье уравнение. Тогда

$$\left. \begin{aligned} +B_{xS} w'' + 2H_S w'' + B_{yS} w'' - B_{xS} \gamma_{xx}'' - H_S \gamma_{xx}'' - \\ - B_{yS} \gamma_{yz}'' - H_S \gamma_{yz}'' - n_x w' - 2n_{xy} w' - n_y w' &= p. \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Система трех уравнений (5.31) эквивалентна системе обоих первых уравнений (5.32) плюс уравнение (5.33).

Возможно расчленение трех дифференциальных уравнений (5.32), которое ведет к трем частным дифференциальным уравнениям шестого порядка для w , γ_{xx} и γ_{yz} , различающимся только своими правыми сторонами (возмущающие функции). Но в случае ортотропности расчленение из-за сложности получаемых при этом выражений не проводится; это допускается только в случае изотропности.

Изотропная многослойная панель. При изотропном материале внешних и среднего слоев для значений поперечного сечения согласно уравнениям (5.13), (5.19), (5.26), (5.27) и (5.31) с учетом уравнений (5.16), (5.24) и отношений, справедливых для изотропного материала:

$$G_u = \frac{E_u}{2(1+\nu)}; \quad G_o = \frac{E_o}{2(1+\nu)}, \quad (5.34)$$

получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} D_{xu} = D_{yu} = D_u = E_u' t_u = \frac{E_u t_u}{1-\nu^2}; \\ D_{xo} = D_{yo} = D_o = E_o' t_o = \frac{E_o t_o}{1-\nu^2}; \\ A_{xz} = A_{yz} = A = G_K \frac{a^2}{h}; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} B_{xs} = B_{ys} = B_s &= \frac{E_u t_u E_o t_o}{E_u t_u + E_o t_o} \frac{\alpha^2}{1 - \nu^2}; \\ T_{xys} = T_s &= \frac{G_u t_u G_o t_o}{G_u t_u + G_o t_o} \alpha^2 = \frac{1 - \nu}{2} B_s; \\ H_s &= 2T_s + \nu B_s = B_s. \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

Подставляя уравнения (5.35) в (5.32) и используя оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

после краткого промежуточного расчета получаем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{A}{B_s} \right) T_{xz} + \frac{1 + \nu}{2} T_{yz}' &= 0; \\ -\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) + \frac{1 + \nu}{2} T_{xz}' + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{A}{B_s} \right) T_{yz} &= 0; \\ + A(T_{xz}' + T_{yz}') + n_x w' + 2n_{xy} w' + n_y w'' &= -p. \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Вместо третьего уравнения (5.36) можно также использовать уравнение (5.37), которое получается после подстановки уравнения (5.35) в (5.33) и краткого промежуточного расчета:

$$B_s \left[\Delta \Delta w - \frac{\partial}{\partial x}(\Delta T_{xz}) - \frac{\partial}{\partial y}(\Delta T_{yz}) \right] - n_x w'' - 2n_{xy} w' - n_y w'' = p. \quad (5.37)$$

Необходимо провести расчленение трех дифференциальных уравнений (5.36) для особого случая, когда $n_x = 0$, $n_y = 0$, $n_{xy} = 0$. С помощью дифференциальных операторов:

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= -\Delta \frac{\partial}{\partial x}; & D_{12} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{A}{B_s}; \\ D_{13} &= \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; & D_{21} &= -\Delta \frac{\partial}{\partial y}; & D_{22} &= \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\ D_{23} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{A}{B_s}; \\ D_{31} &= 0; & D_{32} &= A \frac{\partial}{\partial x}; & D_{33} &= A \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

уравнение (5.36) можно переписать в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} D_{11} w + D_{12} T_{xz} + D_{13} T_{yz} &= 0; \\ D_{21} w + D_{22} T_{xz} + D_{23} T_{yz} &= 0; \\ D_{31} w + D_{32} T_{xz} + D_{33} T_{yz} &= -p. \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

Решение уравнений (5.39) согласно w , τ_{xz} и τ_{yz} (с дифференциальными операторами можно обращаться как с множителями) после некоторого расчета дает следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Delta \left(1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{B_s}{A} \Delta\right) w &= \left(1 - \frac{B_s}{A} \Delta\right) \left(1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{B_s}{A} \Delta\right) \frac{p}{B_s}; \\ \Delta \Delta \left(1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{B_s}{A} \Delta\right) \tau_{xz} &= -\Delta \left(1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{B_s}{A} \Delta\right) \frac{p'}{A}; \\ \Delta \Delta \left(1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{B_s}{A} \Delta\right) \tau_{yz} &= -\Delta \left(1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{B_s}{A} \Delta\right) \frac{p'}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

Следовательно, речь идет о трех частных дифференциальных уравнениях шестого порядка, левые части которых совпадают. Их решения выполняются и неразобщенные дифференциальные уравнения (5.36), откуда вытекают известные зависимости между постоянными интегрирования в решениях для w , τ_{xz} и τ_{yz} трех дифференциальных уравнений (5.40).

Во всех дифференциальных уравнениях (5.40) дифференциальный оператор

$$D = 1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{B_s}{A} \Delta$$

располагается слева и справа от знака равенства. Если его исключить, то получим упрощенную систему дифференциальных уравнений:

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{B_s} - \frac{\Delta p}{A}; \quad \Delta \Delta \tau_{xz} = -\frac{\Delta p'}{A}; \quad \Delta \Delta \tau_{yz} = -\frac{\Delta p'}{A}. \quad (5.41)$$

Система уравнений (5.41) лишь четвертого порядка. Общие решения (5.41) удовлетворяют также системе (5.40), но представляют собой не полное ее решение, так как исключением дифференциального оператора D из уравнений (5.40) теряются¹ решения однородных дифференциальных уравнений. Тем самым число произвольных постоянных интегрирования недостаточно, чтобы выполнить все граничные условия. Несмотря на это, при решении определенных задач иногда вместо уравнений (5.40) исходят из уравнений (5.41) и тогда отказываются от точного выполнения отдельных граничных условий. Подробнее об этом можно узнать в пп. 5.1.3 и 5.1.4.

Предельные случаи дифференциальных уравнений (5.32) и (5.33).

А. Жесткий на сдвиг средний слой. В случае жесткого на сдвиг среднего слоя A_{xz} и A_{yz} бесконечно велики. Разделив первое уравнение (5.32) на A_{xz} , второе на A_{yz} и преобразовав $A_{xz} \rightarrow \infty$, $A_{yz} \rightarrow \infty$, получим

$$\tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0. \quad (5.42)$$

Далее, уравнение (5.33) с учетом уравнения (5.42) дает следующее дифференциальное уравнение:

$$B_{xs} w'''' + 2H_s w'''' + B_{ys} w'''' - n_x w'' - 2n_{xy} w' - n_y w'' = p'. \quad (5.43)$$

¹Решения уравнений (5.41) для τ_{xz} и τ_{yz} [как легко вывести из второго и третьего уравнений (5.41)] характеризуются тем, что $\tau'_{xz} = \tau'_{yz}$ [см. п. 5.1.4, специально (5.58)].

В случае изотропности вследствие $B_{xs} = B_{ys} = H_3 = B$ для $n_x = 0$, $n_y = 0$, $n_{xy} = 0$ уравнение (5.43) упрощается в уравнение Кирхгоффе:

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{B_y} \quad (5.44)$$

Из первого уравнения расчлененных уравнений (5.40) для $A \rightarrow \infty$ может также сразу следовать уравнение (5.44).

Б: Многослойная панель, работающая в одном направлении. Для многослойной панели, которая оперта и нагружена как балка с осью x в качестве оси балки, исчезают все производные по y .

Из второго уравнения (5.32) поэтому следует, что

$$\tau_{yz} = 0, \quad (5.45)$$

в то время как первое и третье уравнения (5.32) после умножения на ширину балки b и введения величин, отнесенных к b :

$$B_s = B_{xs} b; \quad A = A_{xz} b; \quad N = n_x b; \quad q = pb, \quad (5.46)$$

а также с помощью более простой записи γ вместо τ_{xz} дают следующие выражения:

$$B_s(\gamma'' - w''') - A\gamma = 0; \quad A\gamma' + Nw'' = -q. \quad (5.47)$$

Эти отношения идентичны уравнениям (2.25) для многослойных балок с тонкими внешними слоями.

Расчлененные дифференциальные уравнения (5.41) для изотропной многослойной панели также переходят в соответствующие уравнения (2.26) многослойной балки, если только предположить, что:

в уравнениях (5.41) $\Delta = d^2/dx^2$, так как $\partial^2/\partial y^2 = 0$;
 $\tau_{xz} = \gamma$, кроме того, исключен оператор Δ в обеих частях уравнения (следовательно, уравнение дважды интегрировано по x);

в уравнении (2.26) продольная сила N приравнена к нулю.

Сопоставление расчета мягких на сдвиг, тонких панелей с теорией Рейснера

Исходя из первых двух уравнений (5.32) и уравнения (5.33), проведем в них следующие преобразования:

продольные и сдвигающие усилия n_x , n_y , n_{xy} для упрощения приравниваются к нулю;

углы сдвига τ_{yz} и τ_{xz} , а также их производные, согласно последним двум уравнениям (5.29), заменяются поперечными усилиями q_y и q_x ;

третье уравнение (5.30), которое для $n_x = 0$, $n_y = 0$, $n_{xy} = 0$, принимает форму $q_x' + q_y' = -p$, многократно используется при преобразованиях;

для сокращения вводятся новые значения поперечных сечений:

¹ Смещения угла сдвига у балок невозможны вследствие $\tau_{yz} = 0$.

$$\left. \begin{aligned} a_x &= B_{xs} \frac{A_{yz} - \nu_y A_{xz}}{A_{xz} A_{yz}}; \\ a_y &= B_{ys} \frac{A_{xz} - \nu_x A_{yz}}{A_{xz} A_{yz}}; \quad b_x = \frac{\nu_y B_{xs}}{A_{yz}}; \\ b_y &= -\frac{\nu_x B_{ys}}{A_{xz}}; \quad c_x = \frac{T_{xy}s}{A_{xz}}; \quad c_y = \frac{T_{xy}s}{A_{yz}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

Затем для w , q_x и q_y можно вывести следующие дифференциальные уравнение:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -B_{xs} w'' - H_s w'' + (a_x - c_y) q_x'' + c_x q_x'' + (b_x - c_y) p'; \\ q_y &= -B_{ys} w'' - H_s w'' + (a_y - c_x) q_y'' + c_y q_y'' + (b_y - c_x) p'; \\ B_{xs} w'' + 2H_s w'' + B_{ys} w'' - (a_x - c_y) q_x'' - c_x q_x'' - \\ & - (a_y - c_x) q_y'' - c_y q_y'' = p + (b_x - c_y) p'' + (b_y - c_x) p''. \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

Формально эти уравнения точно совпадают с соответствующими отношениями по теории Рейснера для мягких на сдвиг панелей. Значения характеристик поперечных сечений, согласно уравнению (5.48), также могут быть переведены в те же значения по теории Рейснера, если для A_{xz} , A_{yz} и T_{xy} использовать не отношения (5.19) и (5.27), действительные для многослойной панели, а выражения¹, действительные для однородной, ортотропной, мягкой на сдвиг панели толщиной h :

$$\left. \begin{aligned} A_{xz} &= F_a G_{xz} = \frac{5h}{6} G_{xz}; \quad A_{yz} = F_a G_{yz} = \frac{5h}{6} G_{yz}; \\ T_{xy} &= J_t G_{xy} = \frac{h^3}{12} G_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

Подстановка уравнения (5.50) в (5.48) действительно дает значения определенные по теории Рейснера согласно [10], если там коэффициенты поперечной деформации ν_{xz} и ν_{yz} в выражениях для b_x и b_y (которые в [10] называются B_x и B_y) приравнять к нулю. Данная теория для многослойных панелей с плоскими тонкими внешними слоями и теория Рейснера для однородных, с небольшой прочностью на сдвиг, тонких панелей переходят, следовательно, без противоречий одна в другую.

П р и м е ч а н и е. Особый случай изотропности дает, согласно данной теории многослойных конструкций и по Рейснеру, не точно те же самые выражения для $(b_x - c_y)$ и $(b_y - c_x)$, которые как множители присутствуют² перед некоторыми членами нагрузки в правой части дифференциальных уравнений (5.49). Причина этого в том, что:

по данной теории с самого начала не учитывается поперечное сжатие мягкого сердечника ($\nu_{xz} = \nu_{zx} = 0$, $\nu_{yz} = \nu_{zy} = 0$), так что в случае изотропности остается только поперечное сжатие $\nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu$ внешних слоев, в то время как по теории Рейснера предполагается однородный материал панели с поперечным сжатием в каждом направлении, поэтому в случае изотропности справедливо равенство

$$\nu_{xz} = \nu_{zx} = \nu_{yz} = \nu_{zy} = \nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu.$$

¹Относительно множителя $5/6$ при "действительной площади сдвига" $F_a = F/f$ см. [6], § 2.5 с, формулу (2.26)

²Они отличаются на фактор (множитель) $1 + \nu$, который не содержится в [10], (1412).

Эти различные предположки обеих теорий являются основой того, почему при вышеприведенном доказательстве непротиворечивого в случае ортотропности перехода теорий в [10] необходимо было, чтобы $v_{xz} = v_{zx} = 0$, $v_{yx} = v_{xy} = 0$.

5.1.3. Метод раздельных прогибов. Аналогично многослойным балкам делается попытка выразить состояние деформации многослойных панелей вместо w , γ_{xz} и γ_{yz} раздельными прогибами w_M и w_Q :

$$\left. \begin{aligned} w'_M &= -\gamma_{xz} = -w' - \gamma_{xz}; & w'_Q &= \gamma_{xz}; \\ w'_M &= -\gamma_{yz} = -w' - \gamma_{yz}; & w'_Q &= \gamma_{yz}; \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

причем для выражения общего прогиба снова справедливо выражение

$$w = w_M + w_Q. \quad (5.52)$$

Для того чтобы получить дифференциальные уравнения для w_M и w_Q , в первых двух отношениях (5.32) и (5.33) w , γ_{xz} и γ_{yz} выражаются посредством уравнения (5.51) и (5.52) через w_M и w_Q , в результате:

$$\left. \begin{aligned} B_{xz} w''_M + H_3 w'''_M + A_{xz} w'_Q &= 0; \\ B_{yz} w''_M + H_3 w'''_M + A_{yz} w'_Q &= 0; \\ B_{xz} w''_M + 2H_3 w'''_M + B_{yz} w'''_M - n_x(w''_M + w''_Q) - \\ - 2n_{xy}(w''_M + w''_Q) - n_y(w''_M + w''_Q) &= p. \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

Уравнения (5.53) представляют собой три связанных дифференциальных уравнения для двух неизвестных функций w_M и w_Q , следовательно, система является определяемой. Для w_M и w_Q в общем не имеется решений, которые бы одновременно выполняли все три дифференциальных уравнения. Следовательно, выражения (5.51) и (5.52) для раздельных прогибов w_M и w_Q недопустимы в случае ортотропной многослойной панели.

В особом случае изотропной многослойной панели два первых уравнения (5.53) вследствие $A_{xz} = A_{yz} = A$, $B_{xz} = B_{yz} = B_3 = B_3$ упрощаются в следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(B_3 \Delta w_M + A w_Q) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial y}(B_3 \Delta w_M + A w_Q) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

Интегрированием первого уравнения (5.54) по x и второго по y получаем для обоих дифференциальных уравнений одно и то же выражение. Это выражение, а также третье уравнение (5.53), упрощенное для случая изотропии (с произвольными постоянными интегрирования C), имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} B_3 \Delta w_M + A w_Q &= C; \\ B_3 \Delta \Delta w_M - n_x(w''_M + w''_Q) - 2n_{xy}(w''_M - w''_Q) - \\ - n_y(w''_M + w''_Q) &= p. \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

В случае изотропных многослойных панелей, следовательно, можно с помощью выражений (5.51) и (5.52) для раздельных прогибов w_M и w_Q выполнить все три дифференциальных уравнения (5.53), так как два из них идентичны.

Расчленение обоих дифференциальных уравнений (5.55) произвести легко. В особом случае $n_x = 0$, $n_y = 0$, $n_{xy} = 0$ получаем:

$$\Delta \Delta w_M = \frac{p}{B_s}; \quad \Delta w_Q = -\frac{p}{A}. \quad (5.56)$$

Первое из дифференциальных уравнений (5.56) является уравнением четвертого порядка. Из уравнения (5.56) с помощью уравнений (5.51) и (5.52) могут быть выведены дифференциальные уравнения (5.41), которые также являются уравнениями четвертого порядка. Следовательно, введение раздельных прогибов w_M и w_Q вместо w , γ_{xz} и γ_{yz} эквивалентно исключению дифференциального оператора

$$D = 1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{B_s}{A} \Delta$$

из общих расчлененных дифференциальных уравнений (5.40). Уменьшение порядка дифференциальных уравнений с шестого [как в уравнении (5.40)] до четвертого [как в уравнениях (5.55) и (5.56)] означает потерю по одному граничному условию на каждый контур. В этом отношении введение раздельных прогибов w_M и w_Q , и соответственно исключение оператора D из уравнений (5.40) представляют собой ограничение многообразия решений дифференциальных уравнений для деформаций пластинки.

Теперь необходимо установить зависимости между раздельными прогибами и сдвигающими усилиями изотропной многослойной панели. Подстановка уравнений (5.51) и (5.52) в (5.29) с учетом уравнения (5.35) дает следующие отношения:

$$\left. \begin{aligned} m_x &= -B_s(w_M'' + \nu w_Q''); & m_y &= -B_s(w_M'' + \nu w_Q''); \\ m_{xy} &= -(1-\nu) B_s w_M'; & q_x &= A w_Q'; & q_y &= A w_Q'. \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

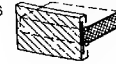
Из уравнений (5.57) ясно происхождение и физическое значение раздельных прогибов: w_M вызывается изгибающими моментами m_x и m_y , а также крутящим моментом m_{xy} на основе деформируемости многослойной панели при изгибе и кручении [жесткость на изгиб B_s , прочность при кручении $2T_s = (1-\nu) B_s$], а w_Q — поперечными силами q_x и q_y на основе деформируемости многослойной панели при сдвиге (жесткость на сдвиг A). Поэтому w_M обозначается как компонента изгиба общего прогиба w , а w_Q — как компонента сдвига общего прогиба w . В случае $A = \infty$ (жесткие на сдвиг панели) из первого уравнения (5.55) сразу следует, что $w_Q = 0$, в то время как второе уравнение (5.55) при $w_M = w$ и для $n_x = 0$, $n_y = 0$, $n_{xy} = 0$ дает известное уравнение Кирхгоффа для пластин [ср. уравнения (5.44)].

5.1.4. Граничные условия. При интегрировании частных дифференциальных уравнений (5.32) для w , γ_{xz} , γ_{yz} и уравнений (5.55) для w_M и w_Q в их решениях получаются произвольные постоянные интегрирования. Их расчет осуществляется с помощью граничных условий. Подбор наиболее важных видов опирания по краям панели вместе с относящимися к ним уравнениями условий для многослойных панелей с плоскими тонкими внешними слоями дан в табл. 5.1.

По каждому краю многослойной панели с плоскими тонкими внешними слоями необходимо выполнить по три граничных условия, а по двум противоположным краям прямоугольной панели (например, при $x = 0$ и $x = l_x$ или $y = 0$ и $y = l_y$) вместе, следовательно, шесть. Число уравнений, таким образом, совпадает с порядком получаемых вследствие расчленения системы (5.32) частных дифференциальных уравнений для w , γ_{xz} и γ_{yz} [см. п. 5.1.2, а также в случае изотропности — отношения (5.40)]. Следовательно, данная интеграционная проблема позволяет использовать уже применявшееся выполнение всех трех граничных условий для каждого края прямоугольной панели. По поводу графы IX табл. 5.1 приведем пояснения (край $x = \text{const}$).

Строка 1: так как $w = 0$ вдоль $x = \text{const}$, то и $w'' = 0$, таким образом, из граничного условия $m_x = 0$ с помощью уравнения (5.29) следует отношение $\gamma_{xz}' - w'' + \nu_y \gamma_{yz}' = 0$.

Таблица 5.1. Граничные условия многослойных панелей с плоскими тонкими внешними слоями

I		II	III			IV	V
Виды опирания			Уравнения условий для края $x = \text{const}$ выражены				
			деформациями и сдвигающими усилиями	w, γ_{xz} и γ_{yz}	w_N и w_D (только при изотропных многослойных панелях)		
1		Шарнирная опора по всей линии	Без усиления края	$w = 0$ $m_x = 0$ $m_{xy} = 0$	$w = 0$ $\gamma_{xz} - w'' + \nu_y \gamma_{yz}' = 0$ $\gamma_{xz}' + \gamma_{yz}' - 2w' = 0$	$w_N + w_D = 0$ $w_N'' + \nu_y w_N'' = 0$	
2			С усилением края	$w = 0$ $m_x = 0$ $\gamma_{yz} = 0$	$w = 0$ $\gamma_{xz} - w'' = 0$ $\gamma_{yz} = 0$		
3		Жестков закрепление		$w = 0$ $\gamma_{xz} = 0$ $\gamma_{yz} = 0$	$w = 0$ $\gamma_{xz} - w' = 0$ $\gamma_{yz} = 0$	$w_N + w_D = 0$ $w_N = 0$	
4		Свободный край панели	Без усиления края	$m_x = 0$ $Q_x = 0$ $m_{xy} = 0$	$(\gamma_{xz}' - w'') + \nu_y (\gamma_{yz}' - w') = 0$ $\gamma_{xz} = 0$ $\gamma_{yz}' - 2w' = 0$	$w_N'' + \nu_y w_N'' = 0$ $w_N'' - \frac{1}{2} \nu_y w_N'' = 0$	
5			С усилением края	$m_x = 0$ $Q_x = 0$ $\gamma_{yz} = 0$	$\gamma_{xz}' - w'' = 0$ $\gamma_{xz} = 0$ $\gamma_{yz} = 0$		
6		Вертикальное закрепление		$\gamma_{xz} = 0$ $Q_x = 0$ $\gamma_{yz} = 0$	$w' = 0$ $\gamma_{xz} = 0$ $\gamma_{yz} = 0$	$w_N' = 0$ $w_N'' = 0$	

Строка 2: так как $w = 0$ и $\gamma_{yz} = 0$ вдоль $x = \text{const}$, то $w'' = 0$ и $\gamma_{yz}' = 0$, таким образом, из граничного условия $m_x = 0$ с помощью уравнения (5.29) следует отношение $\gamma_{xz}' - w'' = 0$. Тем самым, согласно (5.29), неизбежно получается и $m_x = 0$ вдоль $x = \text{const}$.

Строка 4: если $q_x = 0$ вдоль $x = \text{const}$ согласно (5.29), то $\gamma_{xz} = 0$ и $\gamma_{yz}' = 0$, таким образом, граничное условие $m_{xy} = 0$ дает с помощью уравнения (5.29) отношение $\gamma_{yz}' - 2w'' = 0$.

Строка 5: вследствие жесткого крепления элемента — $\gamma_{yz} = 0$ и $w = Ay + B$ вдоль $x = \text{const}$, откуда $\gamma_{yz}' = 0$ и $w'' = 0$; следовательно, граничное условие $m_x = 0$ с помощью уравнения (5.29) дает отношение $\gamma_{xz}' - w'' = 0$.

Строка 6: вследствие $q_x = 0$ вдоль $x = \text{const}$, согласно уравнению (5.29), также $\gamma_{xz} = 0$, таким образом, граничное условия $\gamma_{xz} = 0$ с помощью уравнения (5.3) дает отношение $w' = 0$.

Если имеется особый случай изотропной многослойной панели с плоскими тонкими внешними слоями, тогда, согласно п. 5.1.3, вместо w, γ_{xz} и γ_{yz} расчет можно производить также посредством раздельных прогибов w_N и w_Q согласно уравнениям (5.51) и (5.52). Частные дифференциальные уравнения для w_N и w_Q , которые получаются в результате расчленения системы (5.53), в противоположность уравнению (5.40) являются уравнениями четвертого порядка¹. Поэтому по двум противоположным краям прямоугольной панели могут быть выполнены вместе также только четыре граничных условия. Следовательно, на каждый край приходится только по два граничных условия, т.е. на одно меньше, чем указано в графе III табл. 5.1. Причина этого заключена в выражении (5.51) для раздельных прогибов. Из $\gamma_{xz} = w_Q'$ и $\gamma_{yz} = w_Q'$ непосредственно получается $\gamma_{xz} = \gamma_{yz}$ (5.58).

Метод раздельных прогибов ограничивается, таким образом, многообразием решений дифференциальных уравнений в общем диапазоне панели (т.е. также и по краям панели) на такие смещения, которые выполняют отношение (5.58) и допускают задание только лишь двух произвольных граничных условий на каждый край; тогда третье граничное условие посредством уравнения (5.58) определено неявно. Следовательно, в каком-то, заданном случае опирания необходимо отказаться от точного выполнения одного из трех данных в графе III табл. 5.1 граничных условий и довольствоваться приближенным решением. Какие из трех граничных условий для каждого края соответственно опускаются или изменяются, решается в каждом конкретном случае и зависит от того, какие из граничных условий менее всего сказываются на общем ходе деформаций и сдвигающих усилий многослойной панели. По поводу графы V табл. 5.1 также существуют объяснения (край $x = \text{const}$).

Строки 1 и 2: выполняются только два первых граничных условия графы III; $m_x = 0$ вдоль $x = \text{const}$, согласно (5.57), дает отношение $w_N'' + \nu w_Q'' = 0$.

Строка 3: выполняются только два первых граничных условия графы III; $\gamma_{xz} = 0$ вдоль $x = \text{const}$, согласно (5.51), дает отношение $w_N' = 0$. Поэтому $w_N' = 0$, т.е., согласно уравнению (5.57), $m_{xy} = 0$ вдоль $x = \text{const}$. Для защемленного края панели это не является технически реальным граничным условием (реальнее было бы $\gamma_{yz} = 0$, как указано в графе III), но ни

¹ В особом случае $\mu_x = 0$, $\mu_y = 0$, $\mu_{xy} = 0$ [см. уравнение (5.56)].

$m_x = 0$, ни $\tau_{yx} = 0$ вдоль $x = \text{const}$ существенно не влияют на общий ход сдвигающих усилий и смещений многослойной панели, а имеют преимущественно локальное значение.

Строки 4 и 5: выполняется только первое граничное условие графы III, т.е. $m_x = 0$ вдоль $x = \text{const}$, откуда с помощью уравнения (5.57) сразу же следует, что $w_N'' + \nu w_N'' = 0$. Вместо второго и третьего граничных условий требуется обращение в нуль суммы поперечной силы приведенного сдвигающего усилия¹: $\bar{q}_x = q_x + m_{xy} = 0$ вдоль $x = \text{const}$, т.е. согласно уравнению (5.57) с учетом первого уравнения (5.55)

$$\bar{q}_x = -B_s [w_N'' + (2 - \nu)w_N''] . \quad (5.59)$$

Строка 6: выполняется только первое граничное условие графы III; $\tau_{yz} = 0$ вдоль $x = \text{const}$ дает $w_N' = 0$, откуда следует также $w_N'' = 0, w_N''' = 0$ и с помощью уравнения (5.57) $m_{xy} = 0$. Вместо второго и третьего граничных условий в графе III снова требуется $\bar{q}_x = q_x + m_{xy} = 0$ вдоль $x = \text{const}$, следовательно, вследствие $w_N'' = 0$, согласно уравнению (5.59) $w_N''' = 0$. Относительно вопроса, насколько реально $m_{xy} = 0$ вдоль $x = \text{const}$, справедливо то же самое положение, что и в строке 3.

Теперь рассмотрим еще один случай: прямоугольная многослойная панель оперта таким образом, что вдоль ее общего периметра

$$w = w_N + w_R = 0; \quad \Delta w_N = 0. \quad (5.60)$$

Если в уравнение (5.55) произвольную постоянную интегрирования C выбрать равной нулю, то уравнение (5.55) сразу же дает $w_R = 0$, причём первое уравнение (5.60) также дает $w_N = 0$:

$$w_N = 0; \quad w_R = 0. \quad (5.61)$$

Следовательно, в результате $\Delta w_N = 0$ не только общий прогиб $w = w_N + w_R$, но и отдельные прогибы w_N и w_R исключаются по отдалённости вдоль всех четырех краев прямоугольной панели. Тем самым, например, для края $x = \text{const}$ справедливо также $w_N'' = 0$ и $w_R'' = 0$, т.е. вследствие $\Delta w_N = w_N'' + w_R'' = 0$ также и $w_N''' = 0$, так что с помощью уравнений (5.51) и (5.57) сразу же следует, что

$$\tau_{yz} = 0, \quad m_x = 0, \quad m_y = 0. \quad (5.62)$$

Аналогичные отношения можно найти и для края $y = \text{const}$. Граничные условия (5.60) соответствуют, таким образом, как явствует из строки 2 графы III табл. 5.1, шарнирно-линейному опиранию многослойной панели по четырем сторонам с краевым усилением.

Далее, с учетом уравнений (5.56), (5.60) и (5.61) с сокращениями $w [A = \infty] = w_B$, $w [B_s = \infty] = w_s$ легко получается².

$$w_B = w_N; \quad w_s = w_R. \quad (5.63)$$

¹ Сдвигающее усилие возникает за счет пересчета краевого крутящего момента m_{xy} и статически равнозначно ему.

² Дифференциальные уравнения и граничные условия для w_B и w_N , с одной стороны, а также для w_s и w_R , с другой — идентичны.

Прогиб w_0 и прогиб при сдвиге w_s шарнирно-опертой по четырем сторонам изотропной прямоугольной панели могут быть определены независимо один от другого и позднее суммированы в общий прогиб w .

5.1.5. Напряжения в многослойной панели. Определив из уравнений (5.32) и (5.33) смещения w , f_{xx} и f_{yy} и соответственно из уравнения (5.55) w_M и w_Q с учетом граничных условий, с помощью уравнений (5.29) и (5.57) можно найти изгибающие моменты, крутящий момент и поперечные силы многослойной панели. Тем самым можно рассчитать также и напряжения; решение отношений (5.29) по величинам деформации и подстановка в отношения (5.11) и (5.7), выражающие напряжения, с учетом уравнений (5.6) и (5.3), выражающих деформации, а также характеристики поперечного сечения (5.13), (5.19), (5.21), (5.26), (5.27) после краткого расчета дают следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xu} &= \frac{1}{t_u} \left(\frac{D_{xu}}{D_x} n_x + \frac{1}{\alpha} m_x \right); & \sigma_{xo} &= \frac{1}{t_o} \left(\frac{D_{xo}}{D_x} n_x - \frac{1}{\alpha} m_x \right); \\ \sigma_{yu} &= \frac{1}{t_u} \left(\frac{D_{yu}}{D_y} n_y + \frac{1}{\alpha} m_y \right); & \sigma_{yo} &= \frac{1}{t_o} \left(\frac{D_{yo}}{D_y} n_y - \frac{1}{\alpha} m_y \right); \\ \tau_{xyu} &= \frac{1}{t_u} \left(\frac{A_{xyu}}{A_{xy}} n_{xy} + \frac{1}{\alpha} m_{xy} \right); & \tau_{xyo} &= \frac{1}{t_o} \left(\frac{A_{xyo}}{A_{xy}} n_{xy} - \frac{1}{\alpha} m_{xy} \right); \\ \tau_{xz} &= \frac{1}{\alpha} q_x; & \tau_{yz} &= \frac{1}{\alpha} q_y. \end{aligned} \right\} \quad (5.64)$$

В уравнениях (5.64) необходимо учесть, что из-за (5.22)

$$\frac{D_{xu}}{D_x} = \frac{D_{yu}}{D_y} = \frac{A_{xyu}}{A_{xy}}; \quad \frac{D_{xo}}{D_x} = \frac{D_{yo}}{D_y} = \frac{A_{xyo}}{A_{xy}}.$$

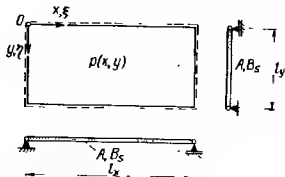
В особом случае, когда внешние слои имеют одинаковую толщину ($t_u = t_o = t$), одинаковый модуль упругости ($E_u = E_o = E$), первые шесть уравнений (5.64) упрощаются в следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xu,o} &= \frac{1}{t} \left(\frac{n_x}{2} \pm \frac{m_x}{\alpha} \right); & \sigma_{yu,o} &= \frac{1}{t} \left(\frac{n_y}{2} \pm \frac{m_y}{\alpha} \right); \\ \tau_{xyu,o} &= \frac{1}{t} \left(\frac{n_{xy}}{2} \pm \frac{m_{xy}}{\alpha} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

5.2. ПРИМЕРЫ МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ С НАГРУЗКАМИ, ДЕЙСТВУЮЩИМИ В ПОПЕРЕЧНОМ НАПРАВЛЕНИИ

5.2.1. Шарнирно-опертая по четырем сторонам изотропная прямоугольная панель. Произвольная поперечная нагрузка $p(x, y)$. Имеется шарнирно-опертая по четырем сторонам изотропная многослойная панель под произвольной поперечной нагрузкой $p(x, y)$ (рис. 33). Вследствие изотропности, согласно п. 5.1.3, можно использовать метод раздельных прогибов, а вследствие шарнирного опирания по четырем сторонам, согласно уравнениям (5.63), прогиб $w_0 = w_M$ и прогиб при сдвиге $w_s = w_Q$ могут быть вычислены независимо один от другого, прежде чем они будут суммированы в общий прогиб w . Будем исходить из дифференциальных уравнений (5.56) для w_M и w_Q .

Рис. 33. Шарнирно-опертая прямоугольная панель под действием поперечной нагрузки



Нагрузку на единицу площади $p(x, y)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$p(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y}. \quad (5.66)$$

Коэффициенты Фурье p_{jk} в уравнении (5.66) получаются из

$$p_{jk} = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} p(x, y) \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y} dx dy. \quad (5.67)$$

Компонент изгиба $w_M(x, y)$ площади общего прогиба $w(x, y)$ выражается в качестве двойного ряда синуса с неизвестными еще коэффициентами w_{Mjk}

$$w_M(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w_{Mjk} \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y}. \quad (5.68)$$

Это выражение выполняет уже граничные условия $w_M = 0$ и $\Delta w_M = 0$ панели согласно уравнениям (5.60) и (5.61), так как w_M и Δw_M почленно содержат множитель $\sin(j\pi x/l_x) \sin(k\pi y/l_y)$, который исключается по краям $x = 0$, $x = l_x$, $y = 0$ и $y = l_y$. Чтобы выполнить дифференциальное уравнение $\Delta \Delta w_M = p/B$ согласно уравнению (5.56), в него надо подставить отношения (5.66) и (5.68). Приравнивание коэффициентов в $\sin(j\pi x/l_x) \sin(k\pi y/l_y)$ дает

$$w_{Mjk} = \frac{p_{jk}}{\pi^4 (j^2/l_x^2 + k^2/l_y^2) B_s}. \quad (5.69)$$

Подстановка уравнения (5.69) в (5.68) дает площадь прогиба $w_M(x, y)$.

Компонент сдвига $w_Q(x, y)$ площади общего прогиба $w(x, y)$ получается в качестве двойного ряда

$$w_Q(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w_{Qjk} \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y}. \quad (5.70)$$

Он везде выполняет граничные условия панели $w_Q = 0$ согласно (5.61); его коэффициенты w_{Qjk} получаются подстановкой в следующее из уравнения (5.55) (при $C = 0$ отношение $w_Q = -B_s \Delta w_M / A$ и приравниванием коэффициентов в $\sin(j\pi x/l_x) \sin(k\pi y/l_y)$:

$$w_{Qjk} = \frac{p_{jk}}{\pi^2 (j^2/l_x^2 + k^2/l_y^2) A}. \quad (5.71)$$

Подстановка уравнения (5.71) в (5.70) дает площадь прогиба $w(x, y)$.

Площадь общего прогиба $w(x, y)$ получаем, согласно (5.52), через суммирование площадей отдельных прогибов (5.68) и (5.70):

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w_{jk} \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y} \quad (5.72)$$

при

$$w_{jk} = w_{M/jk} + w_{Q/jk}. \quad (5.73)$$

Если ввести безразмерные величины:

$$\xi = \frac{x}{l_x}; \quad \eta = \frac{y}{l_y}; \quad \zeta = \frac{y}{l_y}, \quad (5.74)$$

тогда

$$w(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w_{jk} \sin j\pi \xi \sin k\pi \eta \quad (5.75)$$

при

$$w_{jk} = \frac{p_{jk} l_x^4}{B_s} \frac{\xi^4}{\pi^4 (\xi^2 j^2 + k^2)^2} + \frac{p_{jk} l_x^2}{A} \frac{\xi^2}{\pi^2 (\xi^2 j^2 + k^2)^2}. \quad (5.76)$$

Сдвигающие усилия многослойной панели получаются с помощью отношений (5.57) точно так же, как тригонометрические двойные ряды:

$$\left. \begin{aligned} m_x(\xi, \eta) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m_{xjk} \sin j\pi \xi \sin k\pi \eta; \\ m_y(\xi, \eta) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m_{yjk} \sin j\pi \xi \sin k\pi \eta; \\ m_{xy}(\xi, \eta) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m_{xyjk} \cos j\pi \xi \cos k\pi \eta; \\ q_x(\xi, \eta) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_{xjk} \cos j\pi \xi \sin k\pi \eta; \\ q_y(\xi, \eta) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_{yjk} \sin j\pi \xi \cos k\pi \eta, \end{aligned} \right\} \quad (5.77)$$

с коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} m_{xjk} &= p_{jk} l_x^2 \frac{\xi^2 (\xi^2 j^2 + \eta^2 k^2)}{\pi^2 (\xi^2 j^2 + k^2)^2}; \\ m_{yjk} &= p_{jk} l_x^2 \frac{\xi^2 (\xi^2 \eta^2 j^2 + k^2)}{\pi^2 (\xi^2 j^2 + k^2)^2}; \\ m_{xyjk} &= p_{jk} l_x^2 \frac{-(1-\nu) \xi^2 j k}{\pi^2 (\xi^2 j^2 + k^2)^2}; \\ q_{xjk} &= p_{jk} l_x \frac{\xi^2 j}{\pi (\xi^2 j^2 + k^2)}; \\ q_{yjk} &= p_{jk} l_x \frac{\xi k}{\pi (\xi^2 j^2 + k^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.78)$$

Постоянная нагрузка p_0 на единицу площади. Если постоянную нагрузку p_0 на единицу площади разложить в ряд Фурье, тогда уравнение (5.67) даст коэффициенты

$$p_{jk} = \frac{16p_0}{\pi^2 jk} (j, k = 1, 3, 5, \dots). \quad (5.79)$$

Как и следует ожидать из законов симметрии, возникают только непарные синусоидальные волны ($j, k = 1, 3, 5, \dots$). Подстановка уравнения (5.79) в (5.76) и (5.78) дает коэффициенты ряда общего прогиба и сдвигающих усилий. Суммированием членов ряда получаем площадь прогиба и виды сдвигающих усилий. Оценка рядов для некоторых точек панели, некоторые краевые соотношения сторон $\mathcal{K} = l_y/l_x$ прямоугольной панели, а также оба коэффициента поперечной деформации¹ $\nu=0$ и $\nu=0,5$ представлены в табл. 5.2. Схождение рядов тем хуже, чем больше $\mathcal{K}$; кроме того, ряды для поперечных сил сходятся медленнее, чем ряды для прогибов.

5.2.2. Изотропная прямоугольная панель с шарнирным опиранием по двум сторонам. Произвольная поперечная нагрузка, симметричная оси абсцисс. Рассмотрим изотропную многослойную панель (рис. 34) под действием симметричной оси абсцисс, но произвольной поперечной нагрузки $p(x, y)$. Шарнирная краевая пара на линейных опорах ($x=0$ и $x=l_x$) имеет жесткое усиление краев, а свободные края ($y=0$, $y=l_y$) не имеют никакого. Будем исходить из дифференциальных уравнений (5.40) для w , τ_{xz} и τ_{yz} . Нагрузку $p(x, y)$ на единицу площади можно разложить в ряд Фурье в направлении x :

$$p(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(y) \sin \frac{j\pi x}{l_x}. \quad (5.80)$$

Коэффициенты Фурье $p_j(y)$ в уравнении (5.80) получаются из

$$p_j(y) = \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} p(x, y) \sin \frac{j\pi x}{l_x} dx. \quad (5.81)$$

Деформации $w(x, y)$, $\tau_{xz}(x, y)$ и $\tau_{yz}(x, y)$ предполагаются также в качестве тригонометрических рядов в направлении x с еще неизвестными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{j=1}^{\infty} w_j(y) \sin \frac{j\pi x}{l_x}; \\ \tau_{xz}(x, y) &= \sum_{j=1}^{\infty} \tau_{xzj}(y) \cos \frac{j\pi x}{l_x}; \\ \tau_{yz}(x, y) &= \sum_{j=1}^{\infty} \tau_{yzj}(y) \sin \frac{j\pi x}{l_x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.82)$$

Эти условия по обоим краям $x=0$ и $x=l_x$ выполняют уже три граничных условия $w=0$, $m_x=0$ и $\tau_{yz}=0$ панели согласно табл. 5.1, строка 2, так как w , m_x и τ_{yz} почленно содержат фактор $\sin j\pi x/l_x$, который при $x=0$ и $x=l_x$ исключается. Выражения (5.82) подставляются затем в частные дифференциальные уравнения (5.40), и после приравливания коэффициентов в $\sin j\pi x/l_x$ и соответственно $\cos j\pi x/l_x$ получаем для

¹ Коэффициент поперечной деформации ν входит, согласно (5.56) и (5.57) правда, только в численные множители перед m_x , m_y и m_{xy} , а не в численные множители перед w_x , w_y , q_x и q_y .

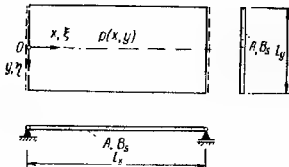
Таблица 5.2. Раздельные прогибы и сдвигающие усилия шарнирно-опертой по четырем сторонам многослойной панели с тонкими внешними слоями

$\mathcal{K} = \frac{l_y}{l_x}$	$\frac{w_N}{\rho_0 l_x^2 / B_0}$	$\frac{w_D}{\rho_0 l_x^2}$	$\frac{m_x}{\rho_0 l_x^2}$		$\frac{m_y}{\rho_0 l_x^2}$		$-\frac{m_{xy}}{\rho_0 l_x^2}$		$\frac{q_x}{\rho_0 l_x}$	$\frac{q_y}{\rho_0 l_x}$
	$\xi=0,5$ $\eta=0,5$	$\xi=0,5$ $\eta=0,5$	$\xi=0,5$ $\eta=0,5$		$\xi=0,5$ $\eta=0,5$		$\xi=0$ $\eta=0$		$\xi=0$ $\eta=0$	$\xi=0,5$ $\eta=0,5$
	ν	ν	$\nu=0$	$\nu=0,5$	$\nu=0$	$\nu=0,5$	$\nu=0$	$\nu=0,5$	ν	ν
1	0,00406	0,0737	0,0368	0,0552	0,0368	0,0552	0,0462	0,0231	0,338	0,338
1,2	0,00564	0,0868	0,0524	0,0696	0,0344	0,0506	0,0543	0,0272	0,380	0,352
1,4	0,00705	0,0968	0,066	0,0814	0,0308	0,0638	0,0595	0,0298	0,411	0,362
1,6	0,00830	0,1042	0,0784	0,0913	0,0258	0,065	0,0629	0,0315	0,435	0,365
1,8	0,00931	0,1098	0,0884	0,0991	0,0214	0,0856	0,065	0,0325	0,452	0,368
2	0,01013	0,1139	0,0965	0,1052	0,0174	0,0657	0,0661	0,0331	0,465	0,37
3	0,01223	0,1227	0,1174	0,1201	0,0053	0,064	0,0677	0,0336	0,493	0,372
4	0,01282	0,1245	0,123	0,1236	0,0015	0,063	0,0678	0,0339	0,498	0,372
5	0,01297	0,1249	0,1247	0,1248	0,0002	0,0626	0,0678	0,0339	0,5	0,372
	0,01302	0,125	0,125	0,125	0	0,0625	0,0678	0,0339	0,5	0,372

Примечания: 1. Величины $w_N, w_D, m_x, m_{xy}, q_x$ и q_y для данных зон панели (ξ, η) принимают свои наибольшие значения. Напротив, $m_y = \max$ только для $\mathcal{K} = 1$ и 1,2 в точках $\xi = 0,5, \eta = 0,5$; для $\mathcal{K} \geq 1,4$, наоборот, возникают два максимума на прямых $\eta = 0,5$, которые располагаются слева и справа от центра панели симметрично $\xi = 0,5$; их расчет здесь не приводится.

2. Так как m_x, m_y и m_{xy} , согласно (5.78), линейно зависят от коэффициента поперечной деформации ν , то изгибающие и крутящие моменты могут быть определены для других, а не указанных здесь коэффициентов поперечной деформации $\nu = 0$ и $\nu = 0,5$ посредством линейных интерполяций.

Рис. 34. Прямоугольная панель с шарнирным опиранием по двум сторонам



еще зависящих от y коэффициентов рядов $w_j(y)$, $\chi_{xzj}(y)$ и $\chi_{yzj}(y)$ по одному обычному дифференциальному уравнению. В процессе расчета используются следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{l_y}{l_x}; \quad \beta = \frac{B_s}{A l_y^2}; \quad \alpha_j = \frac{j\pi}{l_x}; \\ \beta_j &= \sqrt{\alpha_j^2 + \frac{2}{(1-\nu)\beta l_y^2}}; \\ \delta_j &= \sqrt{\alpha_j^2 + \frac{1}{\beta l_y^2}}; \\ \lambda_j &= \frac{\alpha_j l_y}{2} = \frac{j\pi \mathcal{K}}{2}, \quad \mu_j = \frac{\beta_j l_y}{2} = \sqrt{\lambda_j^2 + \frac{1}{2(1-\nu)\beta}}; \\ \xi &= \frac{x}{l_x}, \quad \eta = \frac{y}{l_y}. \end{aligned} \right\} \quad (5.83)$$

С помощью уравнений (5.83) дифференциальные уравнения для w_j , χ_{xzj} и χ_{yzj} ($j=1, 2, 3, \dots$) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha_j^2 \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta_j^2 \right) w_j &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \delta_j^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta_j^2 \right) \frac{p}{A}; \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha_j^2 \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta_j^2 \right) \chi_{xzj} &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha_j^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta_j^2 \right) \alpha_j \frac{p}{A}; \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha_j^2 \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta_j^2 \right) \chi_{yzj} &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha_j^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta_j^2 \right) \frac{p}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (5.84)$$

Все три дифференциальных уравнения являются уравнениями шестого порядка, поэтому их общие решения содержат шесть постоянных интегрирования, например общее решение для w_j имеет вид

$$w_j = C_{1j} \cosh \alpha_j y + C_{2j} \alpha_j y \sinh \alpha_j y + C_{3j} \cosh \beta_j y + C_{4j} \sinh \alpha_j y + \\ + C_{5j} \alpha_j y \cosh \alpha_j y + C_{6j} \sinh \beta_j y + w_{pj}.$$

Так как нагрузка $p(x, y)$ предположительно симметрична $x=0$, то w_j и χ_{xzj} также симметричны $x=0$, в то время как χ_{yzj} приложена симметрично $x=0$. Следовательно, в решениях дифференциальных уравнений (5.84)

при w_j и γ_{xzj} необходимо учитывать только симметричные компоненты решений ($\cosh \alpha_j y, \alpha_j y \sinh \alpha_j y, \cosh \beta_j y$), а при γ_{yzj} — только антисимметричные компоненты решений ($\sinh \alpha_j y, \alpha_j y \cosh \alpha_j y, \sinh \beta_j y$), тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} w_j &= C_1 \cosh \alpha_j y + C_2 \alpha_j y \sinh \alpha_j y + C_3 \cosh \beta_j y + w_{pj}; \\ \gamma_{xzj} &= D_1 \cosh \alpha_j y + D_2 \alpha_j y \sinh \alpha_j y + D_3 \cosh \beta_j y + \gamma_{xzpj}; \\ \gamma_{yzj} &= E_1 \sinh \alpha_j y + E_2 \alpha_j y \cosh \alpha_j y + E_3 \sinh \beta_j y + \gamma_{yzpj}, \end{aligned} \right\} \quad (5.85)$$

причем w_{pj} , γ_{xzpj} и γ_{yzpj} представляют собой частные интегралы дифференциальных уравнений (5.84).

Между постоянными интегрирования в уравнениях (5.85) имеются известные зависимости; они получаются подстановкой уравнения (5.85) в (5.82) и затем (5.82) в еще не распененные частные дифференциальные уравнения (5.36) для $n_x = 0, n_y = 0, n_{xy} = 0$. После некоторого расчета находим, что:

$$\begin{aligned} D_{1j} &= E_{1j} = -2\alpha_j^2 \frac{B_2}{A} C_{2j}; \\ D_{2j} &= E_{2j} = C_{3j} = 0; \quad E_{3j} = \frac{\alpha_j}{\beta_j} D_{3j}. \end{aligned}$$

Если для упрощения полученных выражений D_{3j} заменить новые постоянные C_{3j} согласно $D_{3j} = 2\alpha_j^2 \beta_j \frac{B_2}{A} C_{3j}$, тогда из уравнений (5.85) вытекают отношения:

$$\left. \begin{aligned} w_j &= C_{1j} \cosh \alpha_j y + C_{2j} \alpha_j y \sinh \alpha_j y + w_{pj}; \\ \gamma_{xzj} &= 2\alpha_j^2 \frac{B_2}{A} (-C_{2j} \alpha_j \cosh \alpha_j y + C_{3j} \beta_j \cosh \beta_j y) + \gamma_{xzpj}; \\ \gamma_{yzj} &= 2\alpha_j^2 \frac{B_2}{A} (-C_{2j} \sinh \alpha_j y + C_{3j} \sinh \beta_j y) + \gamma_{yzpj}. \end{aligned} \right\} \quad (5.86)$$

Согласно уравнениям (5.86) w_j , γ_{xzj} и γ_{yzj} содержат вместе только три произвольные постоянные интегрирования — столько же, сколько еще имеется граничных условий по краю $y = l_y/2$ и соответственно $y = -l_y/2$.

Для двух свободных неусиленных краев панели $y = l_y/2$ и $y = -l_y/2$ уравнения граничных условий в соответствии с табл. 5.1, строка 4, имеют вид:

$$m_y(\pm l_y/2) = 0; \quad m_{xy}(\pm l_y/2) = 0; \quad q_y(\pm l_y/2) = 0.$$

Подстановка уравнений (5.82) и (5.86) в (5.29) дает сдвигающие усилия m_y, m_{xy} и q_y , на основании чего верхние граничные условия с учетом β_j, λ_j и μ_j , согласно уравнениям (5.83), дают три определяющих уравнения

$$a_{k1} C_{1j} + a_{k2} C_{2j} + a_{k3} C_{3j} = a_{k0} \quad (k=1, 2, 3) \quad (5.87)$$

с коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= +(1-\nu) \cosh \lambda_j; \\ \alpha_{12} &= +2 \left[1 + (1-\nu) \alpha_j^2 \frac{B_s}{A} \right] \cosh \lambda_j + (1-\nu) \lambda_j \sinh \lambda_j; \\ \alpha_{13} &= -2(1-\nu) \alpha_j \beta_j \frac{B_s}{A} \cosh \mu_j; \quad \alpha_{21} = + \sinh \lambda_j; \\ \alpha_{22} &= + (1 + 2\alpha_j \frac{B_s}{A}) \sinh \lambda_j + \lambda_j \cosh \lambda_j; \\ \alpha_{23} &= -(\alpha_j^2 + \beta_j^2) \frac{B_s}{A} \sinh \mu_j; \quad \alpha_{31} = 0; \\ \alpha_{32} &= -\alpha_j^2 \frac{B_s}{A} \sinh \lambda_j; \quad \alpha_{33} = +\alpha_j^2 \frac{B_s}{A} \sinh \mu_j; \\ \alpha_{10} &= + \frac{m_{ypj}(y=l_y/2)}{\alpha_j^2 B_s}; \quad \alpha_{20} = + \frac{m_{xypj}(y=l_y/2)}{(1-\nu) \alpha_j^2 B_s}; \\ \alpha_{30} &= - \frac{q_{ypj}(y=l_y/2)}{2\alpha_j A} \end{aligned} \right\} \quad (5.88)$$

В уравнениях (5.88) m_{ypj} , m_{xypj} и q_{ypj} являются частичными сдвигающими усилиями без фактора $\sin j\pi x/l_x$ или $\cos j\pi x/l_x$, рассчитанными, согласно (5.29), к частичным деформациям $w_{pj}(y) \sin j\pi x/l_x$, $\gamma_{xzpj}(y) \cos j\pi x/l_x$ и $\gamma_{yzpj}(y) \sin j\pi x/l_x$:

$$\left. \begin{aligned} m_{ypj} &= -B_s [(w_{pj}'' - \gamma_{yzpj}) - \nu(\alpha_j^2 w_{pj} - \alpha_j \gamma_{xzpj})]; \\ m_{xypj} &= -\frac{1-\nu}{2} B_s (2\alpha_j w_{pj} - \gamma_{xzpj} - \alpha_j \gamma_{yzpj}); \\ q_{ypj} &= +A \gamma_{yzpj}. \end{aligned} \right\} \quad (5.89)$$

Решение уравнения (5.87) согласно C_{1j} , C_{2j} и C_{3j} , а также подстановка в уравнения (5.86) и (5.82) дают выражение деформаций многослойной панели. Сдвигающие усилия получаются тогда из уравнений (5.29).

Нагрузка $P(x, y) = P_0 \sin(\pi x/l_x) \cos(\pi y/l_y)$. Разложение в ряд Фурье данной функции нагрузки $P(x, y)$ излишне, так как $P(x, y)$ уже имеется на основании синусоидальной волны в направлении x :

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) &= P_1(y) \sin \alpha_1 x; \\ P_1(y) &= P_0 \cos \frac{\alpha_1}{\lambda} y \end{aligned} \right\} \quad (5.90)$$

при $\alpha_1 = \pi/l_x$ согласно (5.83) для $j=1$. Из уравнений (5.84) можно легко установить частные интегралы:

$$\left. \begin{aligned} w_{p1} &= + \left[\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \frac{P_0}{\alpha_1^2 A} + \frac{\lambda^4}{(1+\lambda^2)^2} \frac{P_0}{\alpha_1^4 B_s} \right] \cos \frac{\alpha_1}{\lambda} y; \\ \gamma_{xzp1} &= + \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \frac{P_0}{\alpha_1 A} \cos \frac{\alpha_1}{\lambda} y; \\ \gamma_{yzp1} &= \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \frac{P_0}{\alpha_1 A} \sin \frac{\alpha_1}{\lambda} y, \end{aligned} \right\} \quad (5.91)$$

откуда с учетом (5.89) следует:

$$\left. \begin{aligned} m_{yP1} &= + \frac{\chi^2(1+\nu\chi^2)}{(1+\chi^2)^2} \frac{\rho_0}{\alpha_1^2} \cos \frac{\alpha_1}{\chi} y; \\ m_{xyP1} &= + \frac{(1-\nu)\chi^3}{(1+\chi^2)^2} \frac{\rho_0}{\alpha_1^2} \sin \frac{\alpha_1}{\chi} y; \\ q_{yP1} &= - \frac{\chi}{1+\chi^2} \frac{\rho_0}{\alpha_1} \sin \frac{\alpha_1}{\chi} y. \end{aligned} \right\} \quad (5.92)$$

Уравнения (5.91) и (5.92) совпадут с уравнениями (5.76) — (5.78), если туда подставить $j=1$, $k=1$ и учесть измененное на рис. 34 по сравнению с рис. 33 положение начала координат. Для a_{10} , a_{20} и a_{30} , согласно уравнениям (5.88), с помощью (5.92) и с учетом $\cos \alpha_1 l_y/2\chi = \cos \pi/2 = 0$ и $\sin \alpha_1 l_y/2\chi = \sin \pi/2 = 1$ получим:

$$\left. \begin{aligned} a_{10} &= 0; \\ a_{20} &= \frac{\chi^3}{(1+\chi^2)^2} \frac{\rho_0}{\alpha_1^4 B_s} = \frac{\chi^3}{(1+\chi^2)^2 \pi^4} \frac{\rho_0 l_x^4}{B_s}; \\ a_{30} &= \frac{\chi}{2(1+\chi^2)} \frac{\rho_0}{\alpha_1^2 A} = \frac{\chi^3 \beta}{2(1+\chi^2) \pi^2} \frac{\rho_0 l_x^4}{B_s}. \end{aligned} \right\} \quad (5.93)$$

Теперь можно решить систему уравнения (5.87). Для наглядности конкретизируем расчет двумя цифровыми примерами.

Пример 1: $\nu = 0,3$; $\chi = 1$; $\beta = 0,2$. Вследствие $\beta = 0,2$ речь идет об относительно мягкой на сдвиг панели. Например, многослойная панель со стальными внешними слоями толщиной 0,5 мм, средним слоем из пенополиуратана толщиной 35 мм и объемной массой 40 кг/м³ [$G_K = 23$ кгс/см²], а также пролетом между опорами $l_x = l_y = 2$ м дает значение $\beta = 0,2$. На основании уравнений (5.83) получаем:

$$\lambda_1 = 1,5708; \mu_1 = 2,4574; \alpha_1^2 B_s / A = 1,97392; \alpha_1 \beta_1 B_s / A = 3,08806; \beta_1^2 B_s / A = 4,83106.$$

Тем самым система уравнений (6.87) дает:

$$C_{11} = + 0,008578993 \rho_0 l_x^4 B_s; C_{12} = - 0,000868242 \rho_0 l_x^4 B_s; \\ C_{13} = + 0,000098097 \rho_0 l_x^4 B_s.$$

Таким образом, определены деформации согласно (5.86) и сдвигающие усилия согласно (5.29). После некоторого расчета получим:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\rho_0 l_x^4}{10^3 B_s} \left[8,579 \cosh \lambda_1 \eta - 1,364 \eta \sinh \lambda_1 \eta + 12,699 \cos \frac{\pi}{2} \eta \right] \sin \pi \epsilon; \\ m_x &= \frac{\rho_0 l_x^2}{10^2} \left[4,073 \cosh \lambda_1 \eta - 0,942 \eta \sinh \lambda_1 \eta - 0,419 \cosh \mu_1 \eta + \right. \\ &\quad \left. + 3,293 \cos \frac{\pi}{2} \eta \right] \sin \pi \epsilon; \\ m_y &= \frac{\rho_0 l_x^2}{10^2} \left[-1,845 \cosh \lambda_1 \eta + 0,942 \eta \sinh \lambda_1 \eta + 0,419 \cosh \mu_1 \eta + \right. \\ &\quad \left. + 3,293 \cos \frac{\pi}{2} \eta \right] \sin \pi \epsilon; \\ m_{xy} &= \frac{\rho_0 l_x^2}{10^2} \left[-2,959 \sinh \lambda_1 \eta + 0,942 \eta \cosh \lambda_1 \eta + 0,461 \sinh \mu_1 \eta + \right. \\ &\quad \left. + 1,773 \sin \frac{\pi}{2} \eta \right] \cos \pi \epsilon; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \frac{p_0 l_x}{10^2} \left[5,384 \cosh \lambda_1 l_2 + 0,952 \cosh \mu_1 l_2 + 15,916 \cos \frac{\pi}{2} l_2 \right] \cos \pi \epsilon; \\ q_y &= \frac{p_0 l_x}{10^2} \left[5,384 \sinh \lambda_1 l_2 + 0,608 \sinh \mu_1 l_2 - 15,916 \sin \frac{\pi}{2} l_2 \right] \sin \pi \epsilon. \end{aligned} \right\} \quad (5.94)$$

Можно установить и выполнить следующий контроль равенства:

$$\int_{-l_x/2}^{l_x/2} m_x(l_x/2, y) dy = M_x(l_x/2) = \frac{2}{\pi^3} p_0 l_x^3;$$

$$\int_{-l_y/2}^{l_y/2} q_x(0, y) dy = Q_x(0) = \frac{2}{\pi^2} p_0 l_x^2.$$

Графическое представление уравнений (5.94) дано на рис. 35 (сплош- ные линии).

Пример 2: $\nu^0 = 0,3$; $\mathcal{A} = 1$; $\beta = 0$.

Если $\beta = 0$, то $A = \infty$, т.е. речь идет о жесткой на сдвиг панели; она рассматривается с целью сравнения. Дифференциальные уравнения (5.40) при $A = \infty$ упрощаются в следующие выражения:

$$\tau_{xz} = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \quad \Delta \Delta w = \frac{p}{B_{\square}}.$$

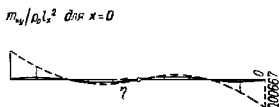
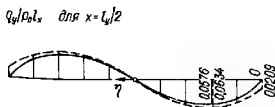
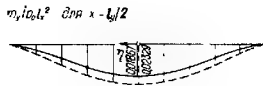
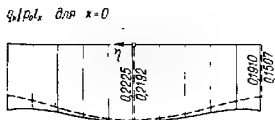
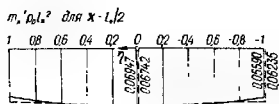
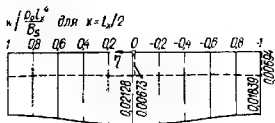


Рис. 35. Графическое представление деформаций и сдвигающих нагрузок

Поэтому из отношений (5.86) остается только первое, которое содержит только две произвольные постоянные интегрирования. Следовательно, по краю панели $y = l_y/2$ и соответственно $y = -l_y/2$ могут быть выполнены только два граничных условия. В соответствии с п. 5.1.4 требуется исключение момента поперечного изгиба m_y и суммы $\bar{q}_y = q_y + m_{y,y}$, складывающейся из поперечной силы и приведенного сдвигающего усилия для $y = \pm l_y/2$: $m_y(\pm l_y/2) = 0$; $\bar{q}_y(\pm l_y/2) = 0$.

Аналогично, когда $A \neq \infty$, для C_{y1} и C_{y2} получаем определяющие уравнения

$$\alpha_{k1} C_{y1} + \alpha_{k2} C_{y2} = \alpha_{k0} \quad (k = 1, 2) \quad (5.95)$$

с коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= (1-\nu) \cosh \lambda_1; & \alpha_{12} &= 2 \cosh \lambda_1 - (1-\nu) \lambda_1 \sinh \lambda_1; \\ \alpha_{21} &= (1-\nu) \sinh \lambda_1; & \alpha_{22} &= (1+\nu) \sinh \lambda_1 + (1-\nu) \lambda_1 \cosh \lambda_1; \\ \alpha_{10} &= 0; & \alpha_{20} &= - \frac{q_y l_y (y = l_y/2)}{\alpha_j^3 B_s} \end{aligned} \right\} \quad (5.96)$$

При этом

$$\bar{q}_{y,pj} = -B_s [\ddot{w}_{pj} - (2-\nu) \alpha_j^2 \dot{w}_{pj}], \quad (5.97)$$

откуда, согласно уравнениям (5.90), непосредственно следует, что нагрузки:

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_{y,pj} &= - \frac{x + (2-\nu)x^3}{(1+x^2)^2} \frac{p_0}{\alpha_1} \sin \frac{\alpha_1}{x} y; \\ \alpha_{20} &= \frac{x + (2-\nu)x^3}{(1+x^2)^2 \pi^4} \frac{p_0 l_x^4}{B_s} \sin \frac{\alpha_1}{x} y \end{aligned} \right\} \quad (5.98)$$

При λ_1 соответствующем значениям в примере 1:

$$\begin{aligned} C_{11} &= +0.00416175 \frac{p_0 l_x^4}{B_s}; \\ C_{12} &= -0.000968344 \frac{p_0 l_x^4}{B_s}. \end{aligned}$$

При этом с учетом уравнений (5.86) и (5.29) получаем деформации и сдвигающие усилия:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{p_0 l_x^4}{10^3 B_s} \left[4.162 \cosh \lambda_1 \eta - 1.521 \eta \sinh \lambda_1 \eta + 2.567 \cos \frac{\pi}{2} \eta \right] \sin \pi \epsilon; \\ m_x &= \frac{p_0 l_x^2}{10^2} \left[3.449 \cosh \lambda_1 \eta - 1.051 \eta \sinh \lambda_1 \eta + 3.293 \cos \frac{\pi}{2} \eta \right] \sin \pi \epsilon; \\ m_y &= \frac{p_0 l_x^2}{10^2} \left[-0.964 \cosh \lambda_1 \eta + 1.051 \eta \sinh \lambda_1 \eta + 3.293 \cos \frac{\pi}{2} \eta \right] \sin \pi \epsilon; \\ m_{xy} &= \frac{p_0 l_x^2}{10^2} \left[-2.206 \sinh \lambda_1 \eta + 1.051 \eta \cosh \lambda_1 \eta + 1.773 \sin \frac{\pi}{2} \eta \right] \cos \pi \epsilon; \\ q_x &= \frac{p_0 l_x}{10^2} \left[6.005 \cosh \lambda_1 \eta + 15.916 \cos \frac{\pi}{2} \eta \right] \cos \pi \epsilon; \\ q_y &= \frac{p_0 l_x}{10^2} \left[6.005 \sinh \lambda_1 \eta - 15.916 \sin \frac{\pi}{2} \eta \right] \sin \pi \epsilon. \end{aligned} \right\} \quad (5.99)$$

Можно установить и выполнить следующую проверку равновесия:

$$\int_{-l_y/2}^{l_y/2} m_x(t_x/2, y) dy = M_x(t_x/2) = \frac{2}{\pi^3} p_0 t_x^3;$$

$$\int_{-l_y/2}^{l_y/2} q_x(0, y) dy + \int_0^{l_x} q_y(x, -l_y/2) dx = \frac{2}{\pi^2} p_0 t_x^2.$$

Интеграл по q_y вдоль $y = -l_y/2$ здесь, в отличие от первого примера, не равен нулю, так как на обоих свободных краях панели требовалось, чтобы $\bar{q}_y = q_y + m'_{xy} = 0$ вместо $q_y = 0$. Поэтому при проверке равновесия это также необходимо учесть. Графическое представление уравнений (5.99) показано на рис. 35 (пунктирные линии).

На основе результатов вычислений можно сделать ряд выводов: как явствует из уравнений (5.82) и (5.86), отношение (5.58) для данной панели не выполнено. Несмотря на изотропность многослойной панели и двойную симметрию системы и нагрузки, метод раздельных прогибов в данном случае недопустим¹; необходимо, следовательно, довольствоваться приближенными решениями;

совпадение величин поперечных сил при жесткой на сдвиг панели (пример 2) несколько лучше, чем при мягкой (пример 1);

граничные условия $m_{xy} = 0$, $q_y = 0$ для $y = -l_y/2$ в случае жесткой на сдвиг панели из-за отсутствия достаточного числа постоянных интегрирования выполнены неточно; вместо этого статически эквивалентное приведенное сдвигающее усилие $\bar{q}_y = q_y + m'_{xy}$ для $y = -l_y/2$ равно нулю. Напротив, при мягкой на сдвиг панели все граничные условия выполнены точно.

5.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

5.3.1. Выражения энергии. Энергия деформации изогнутой многослойной панели. Энергия деформации формы W многослойной панели с тонкими внешними слоями, на которую действуют поперечные и продольные нагрузки, получается из общей формулы

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\delta_x \epsilon_x + \delta_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV. \quad (5.100)$$

Если в формулу (5.100) подставить $\delta_x, \delta_y, \tau_{xy}$ согласно (5.11), τ_{xz}, τ_{yz} — согласно (5.7) и $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ — согласно (5.6), причем в уравнении (5.6) предполагается, что $\bar{u}' = 0$, $\bar{v}' = 0$, $\gamma_{xz} = \gamma_{xz} - w'$ и $\gamma_{yz} = \gamma_{yz} - w'$, то при $dV = dx dy dz$ после выполнения интегрирования по высоте панели и применения значения поперечных сечений B_{xs}, B_{ys}, T_{yys} , A_{xz} и A_{yz} , согласно (5.26), (5.27) и (5.19), получим:

$$W = \frac{1}{2} \int \int \left\{ B_{xs} (\gamma_{xz}' - w'')^2 + B_{ys} (\gamma_{yz}' - w'')^2 + (y_s B_{xs} + y_s B_{ys}) (\gamma_{xz}' - w'') (\gamma_{yz}' - w'') + T_{yys} (\gamma_{xz}' + \gamma_{yz}' - 2w'')^2 + A_{xz} \gamma_{xz}^2 + A_{yz} \gamma_{yz}^2 \right\} dx dy. \quad (5.101)$$

¹ См. пп. 5.1.3 и 5.1.4.

При особом случае изотропности уравнение (5.101) упрощается в уравнение

$$W = \frac{1}{2} \iint_{(F)} B_s [(\gamma'_{xz} - w'')^2 + (\gamma'_{yz} - w'')^2 + 2\nu(\gamma'_{xz} - w'')(\gamma'_{yz} - w'') + (1-\nu)(\gamma'^2_{xz} + \gamma'^2_{yz} - 2w'')^2] dx dy + \frac{1}{2} \iint_{(F)} A(\gamma'^2_{xz} + \gamma'^2_{yz}) dx dy. \quad (5.102)$$

С помощью раздельных прогибов, согласно (5.51), получим

$$W = \frac{1}{2} \iint_{(F)} B_s [(\Delta w_M)^2 - 2(1-\nu)(w''_M w''_Q - w'^2_M)] dx dy + \frac{1}{2} \iint_{(F)} A(w'^2_M + w'^2_Q) dx dy = \left. \begin{aligned} &= W_M + W_Q. \end{aligned} \right\} \quad (5.103)$$

В уравнении (5.103) W_M является частью общей энергии деформации W , вызванной w_M , а W_Q — частью общей энергии деформации W , вызванной w_Q .

Потенциал внешних сил. Внешняя нагрузка многослойной панели состоит из поперечной нагрузки $p(x, y)$, продольной силы n_x и n_y и касательной силы n_{xy} . В соответствии с этим потенциал U внешних сил складывается из обоих компонентов U_q и U_n . Соответственно положениям в п. 2.3.1 получаем:

$$dU_q = -p w dx dy; \quad dU_n = \frac{1}{2} (n_x w'^2 + 2n_{xy} w' w'' + n_y w'^2) dx dy,$$

так что для $U = U_q + U_n$ после интегрирования следует, что

$$U = - \iint_{(F)} p w dx dy + \frac{1}{2} \iint_{(F)} (n_x w'^2 + 2n_{xy} w' w'' + n_y w'^2) dx dy. \quad (5.104)$$

В особом случае, когда $n_x = 0$, $n_y = 0$, $n_{xy} = 0$, U можно выразить через раздельные прогибы согласно (5.51)

$$U = - \iint_{(F)} p(w_M + w_Q) dx dy = U_M + U_Q. \quad (5.105)$$

Когда $n_x \neq 0$, или $n_y \neq 0$, или $n_{xy} \neq 0$, разложение U на U_M и U_Q невозможно.

5.3.2. Методы энергии. Минимум потенциальной энергии. Принцип минимума потенциальной энергии¹ $\Pi = W + U$ был в общем выведен в п. 2.3.2, т.е. для многослойных панелей справедливо также

$$\Pi = \min, \quad \delta \Pi = 0, \quad \delta^2 \Pi > 0. \quad (5.106)$$

Уравнения Эйлера для вариационной задачи $\Pi = \min$. Задача минимизации функционала

$$\Pi = \iint_{(F)} F(w, w', w'', w''', w''', w'''; \gamma'_{xz}, \gamma'_{xz}; \gamma'_{xz}, \gamma'_{xz}; \gamma'_{yz}, \gamma'_{yz}; \gamma'_{yz}, \gamma'_{yz}) dx dy$$

является проблемой вариационного исчисления и ведет к уравнению Эйлера:

¹ Для упрощения упругие опоры многослойной панели не учитываются.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) + \frac{d^2}{dx dy} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) + \frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{\partial F}{\partial w} &= 0; \\ -\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \gamma_{xz}'} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial \gamma_{xz}'} \right) + \frac{\partial F}{\partial \gamma_{xz}} &= 0; \\ -\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \gamma_{yz}'} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial \gamma_{yz}'} \right) + \frac{\partial F}{\partial \gamma_{yz}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.107)$$

Если уравнения (5.101) и (5.104) подставить в П, то уравнения Эйлера (5.107) дадут три соединенных одно с другим частных дифференциальных уравнения для w , γ_{xz} и γ_{yz} , из которых после введения H_s согласно (5.31) первое совпадает с (5.33), а два последних идентичны первым двум уравнениям (5.32). Принцип минимума потенциальной энергии дает, следовательно, те же самые результаты, что и условия равновесия.

Решение с помощью способа Ритца. Основная мысль способа Ритца в применении к принципу минимума потенциальной энергии уже была раскрыта в п. 2.3.2. В качестве выражений для w , γ_{xz} и γ_{yz} принимаются в расчете соответствующие выражения как (2.106) и (2.107), которые зависят от x и y (вместо одного x). Функции сравнения w_j , γ_{xzj} и γ_{yzj} являются произвольно выбираемыми, но по всем четырем краям они должны выполнять по крайней мере геометрические, а если можно, то и динамические граничные условия панели согласно табл. 5.1. После подстановки выражений в П получается в большинстве случаев длинное и сложное выражение, так что расчет неизвестных постоянных происходит с большим трудом.

5.4. ДРУГИЕ ВИДЫ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

5.4.1. Температурный скачок между внешними слоями многослойной панели. При составлении дифференциальных уравнений для многослойной панели, на которую воздействуют разности температурных деформаций внешних слоев, необходимо сначала отношения "сдвигающее усилие — деформация" (5.29) увеличить на температурный член. С помощью сокращений

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu}_x &= \frac{\alpha_{txu} T_u - \alpha_{txo} T_o}{\alpha}, \\ \bar{\nu}_y &= \frac{\alpha_{tyu} T_u - \alpha_{tyo} T_o}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (5.106)$$

в уравнении (5.29) (аналогично расчетам в п. 2.4.1) $\gamma_{xz}' - w''$ надо заменить на $\gamma_{xz}' - w'' - \bar{\nu}_x$, а $\gamma_{yz}' - w''$ на $\gamma_{yz}' - w'' - \bar{\nu}_y$. Тем самым в уравнении (5.29) для m_x и m_y получаются дополнительные члены:

$$\left. \begin{aligned} m_{x\phi} &= -B_{xs} (\bar{\nu}_x + \nu_y \bar{\nu}_y); \\ m_{y\phi} &= -B_{ys} (\bar{\nu}_y + \nu_x \bar{\nu}_x); \end{aligned} \right\} \quad (5.109)$$

поперечные силы остаются неизменными.

Если сдвигающее усилие (5.29), включая дополнительные члены (5.109), ввести в условия равновесия (5.30) и p приравнять к нулю, тогда вместо правых частей $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 0$ трех дифференциальных уравнений (5.32) получим новые правые части:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= B_{xz}(\dot{v}_x' + \nu_1 \dot{v}_y'); \\ \tau_2 &= B_{yz}(\dot{v}_y' + \nu_2 \dot{v}_x'); \\ \tau_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.110)$$

а вместо $\tau_i = p$ в (5.33) получается, что

$$\tau_1 = -B_{xz}(\dot{v}_x'' + \nu_1 \dot{v}_y'') - B_{yz}(\dot{v}_y'' + \nu_2 \dot{v}_x''). \quad (5.111)$$

В особом случае, когда $\dot{v}_x = \dot{v}_y = \dot{v}$, и при изотропном материале внешних слоев τ_1, τ_2, τ_3 и τ_4 упрощаются в следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= (1+\nu) B_s \dot{v}', \quad \tau_2 = (1+\nu) B_s \dot{v}''; \\ \tau_3 &= 0, \quad \tau_4 = -(1+\nu) B_s \Delta \dot{v}. \end{aligned} \right\} \quad (5.112)$$

При этом $\dot{v} = \text{const}$, в результате чего все правые части равны нулю, следовательно, дифференциальные уравнения однородны. Их общие решения не содержат поэтому $\dot{v}$; $\dot{v}$ снова вводится в расчет лишь через граничные условия, соответственно тому, как в примере "б", действительном для случая многослойных балок п. 2.4.1.

5.4.2. Поперечные колебания многослойной панели. Дифференциальные уравнения. Общие динамические основные уравнения получаются добавлением в дифференциальные уравнения (5.32), (5.33), (5.40), (5.55) и (5.56) силы инерции $-\mu \partial^2 w / \partial t^2$ к нагрузке на единицу площади $p(x, y, t)$.

Если в основные динамические уравнения подставить:

$$\left. \begin{aligned} q(x, y, t) &= q(x, y) \sin \omega t; \quad w(x, y, t) = z(x, y) \sin \omega t; \\ \tau_{xz}(x, y, t) &= z_2(x, y) \sin \omega t; \\ \tau_{yz}(x, y, t) &= z_3(x, y) \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (5.113)$$

то посредством приравнивания коэффициентов в $\sin \omega t$ получим три дифференциальных уравнения для незатухающих вынужденных поперечных колебаний многослойной панели в установившемся состоянии. Они являются частными уравнениями, но зависят только от двух координат точек x и y . Если надо учесть сопротивление сдвигу среднего слоя, то это можно осуществить введением комплексных значений жесткости при сдвиге:

$$U = A_{xz}(1 + i h_{xz1}); \quad U = A_{yz}(1 + i h_{yz1}), \quad (5.114)$$

тогда и для q, U, τ_{xz} и τ_{yz} необходимо ввести комплексные выражения наподобие (2.145).

Если в динамические основные уравнения ввести $q(x, y, t) = 0$, а также w, τ_{xz} и τ_{yz} согласно уравнению (5.113), но с собственной круговой частотой ω_j вместо частоты возбуждения ω в синусоидальном члене, то получим три дифференциальных уравнения для незатухающих свободных поперечных колебаний многослойной панели. Они являются частными уравнениями и зависят только от координат точек x и y . Уравнение собственных значений для расчета собственных круговых частот ω_j получается из них с помощью граничных условий панели.

Приближенные решения для ω_j^2 . В случае свободных колебаний многослойных панелей без действия продольных и поперечных сил ва-

* μ в данном случае — масса панели на каждую единицу поверхности.

рационная задача H^* -экстремум, вытекающая из принципа Гамильтона, снова принимает форму (2.152); при этом аналогично (2.155) для E^* справедливо выражение

$$E^* = \frac{1}{2} \iint_{(\Gamma)} \mu z_i^2 dx dy + \frac{m}{2} z_{10}^2, \quad (5.115)$$

тогда как w получаем из (5.101), заменив w на z_1 , γ_{xz} на z_2 и γ_{yz} на z_3 .

Вариационная задача (2.152) может служить для приближенного расчета w_i , если туда способом Ритца подставлять подходящие одночленные функции сравнений и минимизировать H^* по свободным постоянным.

5.5. ДОПОЛНЕНИЯ

5.5.1. Жесткость на сдвиг при конструктивно неоднородном среднем слое. Предпосылки относительно однородного среднего слоя, из которых мы исходили в п. 5.1.1, несправедливы для многих видов многослойных панелей. Теория многослойных конструкций, развитая в предыдущих пунктах, может быть легко дополнена теорией многослойных конструкций с неоднородным средним слоем; все самое существенное по этому поводу уже объяснено в п. 2.5.1. Например, для среднего слоя с ячеистой структурой, согласно рис. 19, и для (отнесенных к единице ширины) жесткостей на сдвиг справедливы отношения (5.19) при G_{xz} согласно (2.21В) и G_{yz} согласно (2.222).

5.5.2. Круглые многослойные панели, опертые по контуру. *Общие положения.* В предыдущих пунктах рассматривались исключительно прямоугольные многослойные панели. Все расчеты и отношения представлялись поэтому прямоугольными декартовыми координатами x, y и z . Ниже будут рассмотрены круглые многослойные панели, опертые по контуру. Для их расчета целесообразно ввести цилиндрические координаты r, φ и z . Для простоты рассматриваются только изотропные, осесимметрично нагруженные и опертые по контуру круглые плиты. Все отношения тем самым являются независимыми от φ , т.е. зависят только от r (рис. 36).

Вследствие изотропности многослойной панели можно применять метод раздельных прогибов. На основе осевой симметрии нагрузки угол сдвига $\gamma_{\varphi z}$ и крутящий момент $m_{\varphi r}$ по всей области панели равны нулю, т.е. и по линии окружности $r = R$, по которой опирается панель. Из трех граничных условий, согласно табл. 5.1, графа III, одно уже выполнено с самого начала. Удовлетворение двух оставшихся граничных условий при $r = R$ всегда можно точно произвести с помощью постоянных интегрирования в w_M и w_Q^* .

В данном случае [аналогично уравнению (5.51)] раздельные прогибы делятся на

$$w_M^* = -\gamma_{rz2} = w' - \gamma_{rz}, \quad w_Q^* = \gamma_{rz}. \quad (5.116)$$

* В противоположность прямоугольным панелям (см. п. 5.1.4), где с применением раздельных прогибов в большинстве видов опирания надо отказываться от выполнения одного из трех граничных условий. Таким образом, получается лишь приближенное решение.

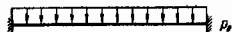
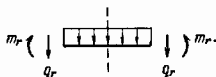
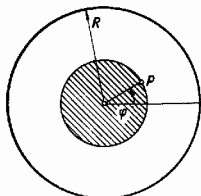
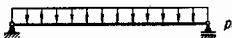


Рис. 38. Круглая многослойная панель, опертая по контуру



Штрихи в данном случае означают производные от r . Дифференциальные уравнения для w_m и w_q даны через (5.56), причем для оператора Лапласа в полярных координатах при осевой симметрии имеет место $\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$.

Так как решения (5.56) для w_m и w_q при $r = R$ являются постоянными величинами и при жесткой опоре $w_m(R) + w_q(R) = 0$, то произвольно можно требовать, чтобы $w_m(R) = 0$ и $w_q(R) = 0$, т.е. раздельного исключения w_m и w_q по краю панели. Это значит, что оба раздельных прогиба w_m и w_q независимо один от другого рассчитываются из дифференциальных уравнений (5.56) и затем могут быть суммированы в общий прогиб w .

Дифференциальные уравнения (5.56) в полярных координатах могут быть приведены в еще более целесообразную для интегрирования форму: подставив оператор Лапласа в уравнение (5.56), умножив на r , проинтегрировав по r , разделив на r и введя общую поперечную силу $Q(r)$ в сечение оболочки с $r = \text{const}$, равную

$$Q(r) = 2\pi r q_r = - \int_{r=0}^r 2\pi \bar{r} p d\bar{r} \quad (5.117)$$

получим следующие уравнения:

$$\left[\frac{1}{r} (r w_m') \right]' = - \frac{Q(r)}{2\pi r B_s}; \quad w_q' = \frac{Q(r)}{2\pi r A}. \quad (5.118)$$

Тогда аналогично уравнению (5.57) получаются следующие отношения для сдвигающих усилий:

$$m_r = -B_s \left(w_m'' + \frac{\nu}{r} w_m' \right); \quad m_\phi = -B_s \left(\nu w_m'' + \frac{1}{r} w_m' \right); \quad q_r = A w_q'. \quad (5.119)$$

Многослойная панель, защемленная по контуру, под действием равномерно распределенной нагрузки p_0 . Согласно (5.117), $Q(r) = -\pi r^2 p_0$, тем самым из (5.118) после интегрирования следует, что

$$w_m = \frac{p_0}{B_s} \left(\frac{r^4}{64} + C_1 r^2 + C_2 \ln r + C_3 \right); \quad w_q = \frac{p_0}{A} \left(-\frac{r^2}{4} + D_1 \right). \quad (5.120)$$

Так как величина $w_m(0)$ должна оставаться конечной, то $C_2 = 0$. Остальные постоянные величины получаются из граничных условий $w_m(R) = 0$, $w_m'(R) = 0$ и $w_q(R) = 0$ и имеют вид: $C_1 = -\frac{R^2}{32}$; $C_3 = \frac{R^4}{64}$; $D_1 = \frac{R^2}{4}$;

таким образом, с помощью безразмерной величины $\rho = r/R$ из уравнения (5.120) получаем:

$$w_m = \frac{p_0 R^4}{64 B_s} (1 - \rho^2)^2; \quad w_q = \frac{p_0 R^2}{4 A} (1 - \rho^2). \quad (5.121)$$

Сдвигающие усилия определяются из уравнений (5.119) с учетом (5.121) и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m_r &= + \frac{p_0 R^2}{16} [(1+\nu) - (3+\nu)\rho^2]; \\ m_\varphi &= + \frac{p_0 R^2}{16} [(1+\nu) - (1+3\nu)\rho^2]; \quad q_r = - \frac{p_0 R}{2} \rho. \end{aligned} \right\} \quad (5.122)$$

Многослойная панель, шарнирно-опертая по контуру, под действием равномерно распределенной нагрузки p_0 . В данном случае снова можно исходить из уравнений (5.120). Как и там, $C_2 = 0$, в то время как остальные постоянные следуют из граничных условий $w_N(R) = 0$, $m_r(R) = 0$, $w_q(R) = 0$ и имеют вид:

$$C_1 = - \frac{3+\nu}{32(1+\nu)} R^2; \quad C_3 = \frac{5+\nu}{64(1+\nu)} R^2; \quad D_1 = \frac{R^2}{4};$$

следовательно, при $\rho = r/R$

$$w_N = \frac{p_0 R^4}{64 B_s} \left[\frac{5+\nu}{1+\nu} - \frac{2(3+\nu)}{1+\nu} \rho^2 + \rho^4 \right]; \quad w_q = \frac{p_0 R^2}{4 A} (1 - \rho^2). \quad (5.123)$$

Сдвигающие усилия получаются из уравнений (5.119) с учетом (5.123) и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m_r &= + \frac{p_0 R^2}{16} (3+\nu)(1-\rho^2); \\ m_\varphi &= + \frac{p_0 R^2}{16} [(3+\nu) - (1+3\nu)\rho^2]; \quad q_r = - \frac{p_0 R}{2} \rho. \end{aligned} \right\} \quad (5.124)$$

6. ИЗГИБ МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ С ПЛОСКИМИ ТОЛСТЫМИ ИЛИ ПРОФИЛИРОВАННЫМИ ВНЕШНИМИ СЛОЯМИ

6.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

6.1.1. Предпосылки. Здесь приводятся расчеты прогибов, сдвигающих усилия, и напряжений, работающих на изгиб многослойных панелей с плоскими толстыми или профилированными внешними слоями. Предпосылки данной главы, аналогичные рассмотренным в п. 3.1.1, расширены двухмерными несущими конструкциями:

линейно-упругие, ортотропные материалы всех слоев, причем направления x и y являются направлениями, характеризующими разную жесткость материалов;

плоские толстые внешние слои, плоскости которых, проходящие через центр тяжести, параллельны одна другой и чья собственная жесткость настолько велика, что ею нельзя пренебречь; ортотропные свойства обоих (в общем различных) внешних слоев являются не полностью произвольными, существуют определенные зависимости между соответствующими одна другой постоянными величинами упругости верхнего и нижнего внешних слоев [см. уравнения (5.22) и (5.24)]. Деформация γ_{xzd} и γ_{yxd} при сдвиге самих внешних слоев остаются не-

учтенными; обобщение плоских толстых внешних слоев на профилированные приводится в п. 6.5.1;

однородный и, по сравнению с внешними слоями, мягкий средний слой, поэтому $\delta_{zk} \approx 0$, $\delta_{yk} \approx 0$, $\tau_{xzk} = \text{const}$ и $\tau_{yzk} = \text{const}$; отсутствие сминаемости многослойной панели;

опирание многослойной панели по контуру параллельными к осям координат краями (двухмерная насущая конструкция с прямоугольной горизонтальной проекцией);

нагрузка на панель одновременно передается от поперечных и продольных сил (теория второго порядка);

деформации достаточно небольшие (линейная теория многослойных конструкций).

6.1.2. Дифференциальные уравнения для w , γ_{xz} и γ_{yz} . Общие положения. Вывод раздельных уравнений для w , γ_{xz} и γ_{yz} осуществляется соответственно п. 3.1.2. В качестве базовой плоскости $z = 0$ выбирается общая плоскость центра тяжести жесткостей внешних слоев на растяжение. Для α_u и α_o справедливы, следовательно, отношения (5.21); рис. 20 и 2 сохраняют свое значение (с частично измененными индексами) также и для данной главы.

Деформации. А. Для угла сдвига среднего слоя справедливы те же самые отношения, что и в п. 5.1.2 [ср. (5.1) и (5.2)]:

$$\gamma_{xz1} = w; \quad \gamma_{yz1} = w' \quad \text{и} \quad (6.1)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz1} + \gamma_{xz2} = w' + \gamma_{xz2}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz1} + \gamma_{yz2} = w' + \gamma_{yz2}. \quad (6.2)$$

Б. Деформации внешних слоев отличаются от деформаций, описанных в п. 5.1.2, так как в данном случае отсутствует предпосылка наличия тонких внешних слоев. Поэтому, если дополнительно учесть наряду с деформациями, согласно (5.6), еще и деформации вследствие собственного изгиба и собственного кручения внешних слоев, тогда аналогично отношениям (3.3), которые справедливы для многослойных панелей с толстыми внешними слоями, получим следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xu} &= \bar{u}' + \alpha_u \gamma'_{xz2} - z_u \gamma'_{xz1}; & \epsilon_{xo} &= \bar{u}' - \alpha_o \gamma'_{xz2} - z_o \gamma'_{xz1}; \\ \epsilon_{yu} &= \bar{v}' + \alpha_u \gamma'_{yz2} - z_u \gamma'_{yz1}; & \epsilon_{yo} &= \bar{v}' - \alpha_o \gamma'_{yz2} - z_o \gamma'_{yz1}; \\ \gamma_{xu} &= \bar{u}' + \bar{v}' + \alpha_u (\gamma'_{xz2} + \gamma'_{yz2}) - z_u (\gamma'_{xz1} + \gamma'_{yz1}); \\ \gamma_{yu} &= \bar{u}' + \bar{v}' - \alpha_o (\gamma'_{xz2} + \gamma'_{yz2}) - z_o (\gamma'_{xz1} + \gamma'_{yz1}). \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

В уравнениях (6.3) z_u и z_o — координаты, отсчитываемые вниз от плоскости собственного центра тяжести нижнего и соответственно верхнего внешнего слоя (ср. рис. 2).

Физические законы. Физические законы для конструкций, состоящих из ортотропных материалов среднего слоя и внешних слоев, можно заимствовать без изменений из п. 5.1.2 [ср. отношения (5.7) для среднего слоя и (5.11) и (5.10) для внешних слоев].

Сдвигающие усилия. Сдвигающие усилия в качестве равнодействующей напряжений на единицу ширины представлены на рис. 32. Они получаются из отношений (5.12). В них подставлены напряжения согласно (5.11) и (5.7) с деформациями согласно (6.3). С целью упрощения расчета относительно положения базовой плоскости $z = 0$ и конструкции

многослойной панели допускать те же самые ограничения общности, как это приводится в п. 5.1.2; для α_u и α_o , следовательно, справедливы отношения (5.23).

При выполнении интегрирования в формулах кроме жесткостей внешних слоев на растяжение согласно (5.13), жесткостей среднего слоя на сдвиг согласно (5.19), жесткостей всей панели ("сэндвича") на изгиб согласно (5.26) и панели на кручение согласно (5.27) возникает еще и собственная жесткость внешних слоев на изгиб согласно

$$\left. \begin{aligned} B_{xu} &= E'_{xu} \frac{t_u^3}{12} = E'_{xu} J_u; & B_{xo} &= E'_{xo} \frac{t_o^3}{12} = E'_{xo} J_o; \\ B_{yu} &= E'_{yu} \frac{t_u^3}{12} = E'_{yu} J_u; & B_{yo} &= E'_{yo} \frac{t_o^3}{12} = E'_{yo} J_o, \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

а также собственная жесткость внешних слоев при кручении согласно

$$T_{xyu} = G_{xyu} \frac{t_u^3}{12} = G_{xyu} J_u; \quad T_{xyo} = G_{xyo} \frac{t_o^3}{12} = G_{xyo} J_o. \quad (6.5)$$

Выражения (6.4) и (6.5) получаются соответственно, как и выражения (3.8) в п. 3.1.2. Если при расчете сдвигающих усилий учесть все эти характеристики поперечных сечений, тогда первые шесть уравнений (5.12) дают следующие отношения:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= D_x(\bar{u}'' + \nu_y \bar{v}'), & n_y &= D_y(\bar{v}'' + \nu_x \bar{u}'), & n_{xy} &= A_{xy}(\bar{u}' + \bar{v}'); \\ m_x &= -B_{xs}(\bar{w}'' + \nu_y \bar{w}'') + B_{xs}(\bar{\gamma}_{xz}' + \nu_y \bar{\gamma}_{yz}') - (B_{xu} + B_{xo})(\bar{w}'' + \nu_y \bar{w}''); \\ m_y &= -B_{ys}(\bar{w}'' + \nu_x \bar{w}'') + B_{ys}(\bar{\gamma}_{yz}' + \nu_x \bar{\gamma}_{xz}') - (B_{yu} + B_{yo})(\bar{w}'' + \nu_x \bar{w}''); \\ m_{xy} &= -2T_{xys} \bar{w}'' + T_{xys}(\bar{\gamma}_{xz}' + \bar{\gamma}_{yz}') - 2(T_{xyu} + T_{xyo}) \bar{w}'' . \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Первые три уравнения (6.6) соответствуют чистому мембранному напряженному состоянию и идентичны первым трем уравнениям (5.29). Три последних уравнения (6.6) соответствуют чистому напряжению в пластинке с изгибающими и сдвиговыми деформациями многослойной панели. Моменты складываются из двух компонентов: из выражений, характеризующих несущую способность "сэндвича".

$$\left. \begin{aligned} m_{xs} &= B_{xs} [-(\bar{w}'' + \nu_y \bar{w}'') + (\bar{\gamma}_{xz}' + \nu_y \bar{\gamma}_{yz}')]; \\ m_{ys} &= B_{ys} [-(\bar{w}'' + \nu_x \bar{w}'') + (\bar{\gamma}_{yz}' + \nu_x \bar{\gamma}_{xz}')]; \\ m_{xys} &= T_{xys} (-2\bar{w}'' + \bar{\gamma}_{xz}' + \bar{\gamma}_{yz}') \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

[они идентичны моментам, приведенным в (5.29)], а также из дополнительных величин, характеризующих собственные изгиб и кручение внешних слоев:

$$\left. \begin{aligned} m_{xu,o} &= -B_{xu,o}(\bar{w}'' + \nu_y \bar{w}''); \\ m_{yu,o} &= -B_{yu,o}(\bar{w}'' + \nu_x \bar{w}''); \\ m_{xyu,o} &= -2T_{xyu,o} \bar{w}'' . \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Поперечные силы многослойной панели определяются из двух последних уравнений (5.12); они, так же как и моменты, складываются из двух компонентов: из величин, характеризующих несущую способность многослойной конструкции:

$$Q_{xs} = A_{xs} \bar{\gamma}_{xz}; \quad Q_{ys} = A_{ys} \bar{\gamma}_{yz} \quad (6.9)$$

[они идентичны поперечным силам, приведенным в (5.29)], и из величин, определяющих изгиб и кручение внешних слоев. Последние получаются из условий равновесия отсеченного, вырезанного фрагмента нижнего или верхнего внешнего слоя:

$$Q_{xu,o} = m'_{xu,o} + m_{xu,o}, \quad Q_{yu,o} = m'_{yu,o} + m_{yu,o},$$

подстановкой (6.8) и введением новых характеристик поперечного сечения

$$H_{x,o} = 2T_{xy,o} + \nu_y B_{xu,o} = 2T_{xy,o} + \nu_x B_{yu,o} \quad (6.10)$$

и имеют вид¹:

$$Q_{xu,o} = -B_{xu,o} w'' - H_{x,o} w'''; \quad Q_{yu,o} = -B_{yu,o} w''' - H_{y,o} w'''. \quad (6.11)$$

Общие поперечные силы получаются как сумма уравнений (6.9) и (6.11), т.е.

$$Q_x = Q_{xs} + Q_{xu} + Q_{xo}, \quad Q_y = Q_{ys} + Q_{yu} + Q_{yo}. \quad (6.12)$$

Если теперь ввести общие жесткости на изгиб:

$$B_x = B_{xs} + B_{xu} + B_{xo}; \quad B_y = B_{ys} + B_{yu} + B_{yo}, \quad (6.13)$$

а также общую жесткость на кручение

$$T_{xy} = T_{xs} + T_{xu} + T_{xo}, \quad (6.14)$$

тогда моменты и поперечные силы можно представить в следующей упрощенной форме:

$$\left. \begin{aligned} m_x &= -B_x(w'' + \nu_y w''') + B_{xs}(\gamma_{xz}' + \nu_y \gamma_{yz}'); \\ m_y &= -B_y(w'' + \nu_x w''') + B_{ys}(\gamma_{yz}' + \nu_x \gamma_{xz}'); \\ m_{xy} &= -2T_{xy}w'' + T_{xy}(\gamma_{xz}' + \gamma_{yz}'); \\ Q_x &= A_{xz}\gamma_{xz} - (B_{xu} + B_{xo})w'' - (H_u + H_o)w'''; \\ Q_y &= A_{yz}\gamma_{yz} - (B_{yu} + B_{yo})w''' - (H_u + H_o)w'''. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Отношения (6.15) соответствуют последним пяти отношениям (5.29) для многослойных панелей с тонкими внешними слоями; при $B_{xu,o} = B_{yu,o} = 0$ первые переходят в последние.

Условия равновесия фрагмента панели. Условия равновесия фрагмента панели с толстыми внешними слоями не отличаются от тех же условий фрагмента панели с тонкими внешними слоями. Поэтому отношения (5.30) могут быть взяты из п. 5.1.2.

Дифференциальные уравнения для w , γ_{xz} и γ_{yz} . Если отношения (6.15) подставить в условия равновесия (5.30), то с учетом (5.31) для характеристик поперечных сечений получим равенства:

$$\left. \begin{aligned} -B_{xs}w'' - H_s w''' + B_{xs}\gamma_{xz}'' + T_{xys}\gamma_{xz}'' - A_{xz}\gamma_{xz}' + (H_s - T_{xys})\gamma_{xz}' &= 0; \\ -B_{ys}w''' - H_s w'' + B_{ys}\gamma_{yz}'' + T_{xys}\gamma_{yz}'' - A_{yz}\gamma_{yz}' + (H_s - T_{xys})\gamma_{yz}' &= 0; \end{aligned} \right\}$$

¹ Используемое в уравнении (6.10) отношение $\nu_y B_{xu,o} = \nu_x B_{yu,o}$ следует из (5.9).

$$\left. \begin{aligned} &-(B_{\pi u} + B_{\pi o})w''' - 2(H_u + H_o)w'' - (B_{\pi u} + B_{\pi o})w'''' + A_{xz}\gamma'_{xz} + A_{yz}\gamma'_{yz} + \\ &+ n_x w'' + 2n_{xy} w' + n_y w'' = -p, \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

которые являются соединенными частными дифференциальными уравнениями для w , γ'_{xz} и γ'_{yz} при расчете по теории второго порядка. Оба первых уравнения (6.16) идентичны двум первым уравнениям (5.32), которые справедливы для многослойных панелей с тонкими внешними слоями. Последние уравнения (6.16) по сравнению с последним уравнением (5.32) содержит некоторые дополнительные члены, которые учитывают собственный изгиб и собственное кручение внешних слоев. При необходимости оно может быть преобразовано: для этого первое уравнение (6.16) дифференцируется по x , второе по y , первое решается согласно $A_{xz}\gamma'_{xz}$, второе — согласно $A_{yz}\gamma'_{yz}$, и полученные таким образом выражения подставляются в третье уравнение (6.16). При поперечном сечении

$$H = H_s + H_u + H_o \quad (6.17)$$

и при учете уравнений (6.13) получим:

$$\left. \begin{aligned} &B_x w''' + 2H w'' + B_y w'''' - B_{xz}\gamma'''_{xz} - H_s \gamma'''_{xz} - B_{yz}\gamma'''_{yz} - \\ &- H_s \gamma'''_{yz} - n_x w'' - 2n_{xy} w' - n_y w'' = p. \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

Система трех уравнений (6.16) эквивалентна системе первых двух уравнений (6.17) плюс уравнения (6.18).

Расчленение трех дифференциальных уравнений возможно и ведет к частным дифференциальным уравнениям восьмого порядка для w , γ'_{xz} и γ'_{yz} , которые различаются лишь своими правыми частями, но из-за сложности возникающих при этом выражений не производится.

Особый случай. Изотропная многослойная панель. В случае изотропных материалов внешних и среднего слоев для характеристик поперечного сечения получаются отношения (5.35) и, согласно (6.4), (6.5) и (6.10), с учетом (5.24) отношения:

$$\left. \begin{aligned} B_{\pi u} = B_{\pi o} = B_u = E_u J_u = \frac{E_u t_u^3}{12(1-\nu^2)}; \\ B_{x o} = B_{y o} = B_o = E_o J_o = \frac{E_o t_o^3}{12(1-\nu^2)}; \\ T_{u u} = T_u = G_u J_u = \frac{1-\nu}{2} B_u; \quad T_{y o} = T_o = G_o J_o = \frac{1-\nu}{2} B_o; \\ H_u = 2T_u + \nu B_u = B_u; \quad H_o = 2T_o + \nu B_o = B_o. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Подстановкой уравнений (5.35) и (6.19) в (6.16) после краткого промежуточного расчета получим:

$$\left. \begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{A}{B_s}\right) \gamma'_{xz} + \frac{1+\nu}{2} \gamma'_{yz} = 0; \\ &-\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) + \frac{1+\nu}{2} \gamma'_{xz} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{A}{B_s}\right) \gamma'_{yz} = 0; \\ &-(B_u + B_o) \Delta \Delta w + A \gamma'_{xz} + A \gamma'_{xz} + A \gamma'_{yz} + n_x w'' + 2n_{xy} w' + n_y w'' = -p. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Вместо третьего уравнения (6.20) можно использовать также и следующие уравнения (6.22), которые с помощью уравнения (5.35) и вытекающей из уравнений (6.13) и (6.19) общей жесткостью при изгибе

$$B = B_x = B_y = B_s + B_u + B_o \quad (6.21)$$

после краткого расчета имеют вид

$$B \Delta \Delta w - B_s \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \gamma_{xz}) - B_s \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \gamma_{yz}) - r_x w'' - 2r_{xy} w'' - r_y w'' = p \quad (6.22)$$

Разобобщение трех дифференциальных уравнений (6.20) должно приниматься при особом случае, когда $r_x = 0$, $r_y = 0$, $r_{xy} = 0$. Аналогично п. 5.1.2 и с теми же дифференциальными операторами, как и в уравнении (5.38), кроме

$$D_{\Delta} = -(B_u + B_o) \Delta \Delta, \quad (6.23)$$

получим следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} & \left(-\frac{B_u + B_o}{A} \Delta \Delta \Delta + \frac{B}{B_s} \Delta \Delta \right) \left(1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{B_s}{A} \Delta \right) w = \left(1 - \frac{B_s}{A} \Delta \right) \left(1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{B_s}{A} \Delta \right) \frac{p}{B_s}; \\ & \left(-\frac{B_u + B_o}{A} \Delta \Delta \Delta + \frac{B}{B_s} \Delta \Delta \right) \left(1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{B_s}{A} \Delta \right) \gamma_{xz} = -\Delta \left(1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{B_s}{A} \Delta \right) \frac{p'}{A}; \\ & \left(-\frac{B_u + B_o}{A} \Delta \Delta \Delta + \frac{B}{B_s} \Delta \Delta \right) \left(1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{B_s}{A} \Delta \right) \gamma_{yz} = -\Delta \left(1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{B_s}{A} \Delta \right) \frac{p''}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

Следовательно, речь идет о трех частных дифференциальных уравнениях восьмого порядка, левые части которых совпадают. Их решения выполняют также и нерасчлененные дифференциальные уравнения (6.20), откуда получаются известные зависимости между постоянными интегрирования в решениях для w , γ_{xz} и γ_{yz} трех дифференциальных уравнений (6.24).

Во всех дифференциальных уравнениях (6.24) слева и справа от знака равенства имеет место дифференциальный оператор

$$D = 1 - \frac{1-\nu}{2} \frac{B_s}{A} \Delta.$$

Если его исключить, то получим более простую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{B_u + B_o}{A} \Delta \Delta \Delta w + \frac{B}{B_s} \Delta \Delta w = \frac{p}{B_s} - \frac{\Delta p}{A}; \\ & -\frac{B_u + B_o}{A} \Delta \Delta \Delta \gamma_{xz} + \frac{B}{B_s} \Delta \Delta \gamma_{xz} = -\frac{\Delta p'}{A}; \\ & -\frac{B_u + B_o}{A} \Delta \Delta \Delta \gamma_{yz} + \frac{B}{B_s} \Delta \Delta \gamma_{yz} = -\frac{\Delta p''}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

Система (6.25) является системой шестого порядка. Общие решения (6.25) для w , γ_{xz} и γ_{yz} удовлетворяют, конечно, и системе (6.24), но не представляют полного решения уравнения (6.24), так как вследствие вычеркивания дифференциального оператора D в уравнениях (6.24) теряются решения однородных дифференциальных уравнений. Таким образом, число произвольных постоянных интегрирования недостаточно, чтобы выполнить все граничные условия. Несмотря на это, при решении конкретных задач вместо уравнений (6.24) можно исходить из уравне-

ний (6.25), чтобы не увеличивать и без того значительные вычислительные затраты, отказаться от выполнения отдельных граничных условий.

Предельные и особые случаи дифференциальных уравнений (6.16) и (6.18). А. Тонкие внешние слои.

В случае очень тонких внешних слоев можно предположить, что $B_{xu} = B_{xo} = B_{yu} = B_{yo} = 0$, следовательно, $B_x = B_{xs}$ и $B_y = B_{ys}$. Тем самым отношения (6.16) и (6.18) переходят в уже известные отношения (5.32) и (5.33).

Б. Средний слой — мягкий на сдвиг.

В случае мягкого на сдвиг среднего слоя $A_{xz} = A_{yz} = 0$; поэтому из первых двух уравнений (6.16) следует:

$$\tau_{xz} = w'; \quad \tau_{yz} = w'; \quad (6.26)$$

в то время как третье уравнение (6.16) дает выражение

$$\left. \begin{aligned} (B_{xu} + B_{xo}) w'''' + 2(N_u + N_o) w'''' + (B_{yu} + B_{yo}) w'''' - \\ - n_x w'' - 2n_{xy} w'' - n_y w'' = p. \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

Уравнение (6.27) является дифференциальным уравнением собственного изгиба двух свободно расположенных одна над другой, без трения скользящих, ортотропных панелей; одновременно из уравнений (6.26) с учетом (6.1) и (6.2) следует, что $\tau_{xz2} = 0$ и $\tau_{yz2} = 0$. Точки u и o , расположенные вертикально одна над другой на обеих плоскостях центра тяжести внешних слоев, и после деформации располагаются еще точно одна над другой (см. рис. 21,б).

В. Средний слой — жесткий на сдвиг.

В случае жесткого на сдвиг среднего слоя $A_{xz} = A_{yz} = \infty$. Если первое уравнение (6.16) разделить на A_{xz} , второе — на A_{yz} и принять $A_{xz} \rightarrow \infty$, $A_{yz} \rightarrow \infty$, то получим:

$$\tau_{xz} = 0; \quad \tau_{yz} = 0. \quad (6.28)$$

Уравнение (6.18) с учетом (6.21) дает выражение

$$B_x w'''' + 2N_u w'''' + B_y w'''' - n_x w'' - 2n_{xy} w'' - n_y w'' = p, \quad (6.29)$$

которое является дифференциальным уравнением для значения жесткости на сдвиг ортотропной панели.

Г. Напряжение многослойной панели в качестве балки.

Для многослойной панели, опертой по двум сторонам и имеющей ось x в качестве оси балки, исчезают все производные по y . Поэтому из второго уравнения (6.16) следует, что

$$\tau_{yz} = 0. \quad (6.30)$$

Первое и третье уравнения (6.16) после умножения на ширину балки b и введения отнесенных к ширине балки b величин B_s, A, N, q согласно (5.46), а также

$$B_u = B_{xu} b, \quad B_o = B_{xo} b \quad (6.31)$$

и с упрощенной записью v вместо τ_{xz} дают:

$$B_s(\tau'' - w'') - Av = 0; \quad A\tau' + Nw'' - (B_u + B_o)w'' = -q. \quad (6.32)$$

Эти отношения идентичны уравнениям (3.17) для многослойных балок с толстыми внешними слоями.

Расчлененные дифференциальные уравнения (6.25) для изотропной многослойной панели также переходят в соответствующие уравнения (3.18) для многослойной балки, поскольку только

в уравнениях (6.25) предполагается, что $\Delta = d^2/dx^2$, так как $\partial^2/\partial y^2 = 0$;

в уравнении для $\gamma_{xz} = \gamma$, кроме того, вычеркивается в обеих частях уравнения оператор Δ (уравнение, следовательно, дважды проинтегрировано по x) и

в уравнениях (3.18) нормальная сила приравняется к нулю.

6.1.3. Граничные условия. При интегрировании дифференциальных уравнений (6.16) и (6.18) для w , γ_{xz} и γ_{yz} в их решениях получаются произвольные постоянные интегрирования. Их расчет осуществляется с помощью граничных условий. В противоположность многослойным панелям с плоскими тонкими внешними слоями при многослойных панелях с толстыми внешними слоями в дополнение к приведенным в табл. 5.1 уравнениям граничных условий для каждого края панели добавляется еще одно (см. табл. 3.1 и рис. 37). В случае края с $x = \text{const}$ без или с шарнирно-присоединенным к внешним слоям усилением края

$$m_{xz,0} = -B_{xz,0} (w'' + \nu_y w'') = 0, \quad (6.33)$$

и в случае края с $x = \text{const}$ с жесткостью внешних слоев на изгиб, к которым присоединено усиление края (торцовая панель),

$$\gamma_{xz} = 0. \quad (6.34)$$

По каждому краю многослойной панели с толстыми внешними слоями необходимо выполнить четыре граничных условия, а по двум противоположным краям прямоугольной панели — соответственно восемь. Число уравнений, следовательно, совпадает с порядком частных дифференциальных уравнений для w , γ_{xz} и γ_{yz} , получаемых в результате расчленения системы (6.16). Таким образом, данная интеграционная задача позволяет выполнить все четыре граничных условия по каждому краю прямоугольной панели.

При наличии особого случая изотропной многослойной панели с толстыми внешними слоями можно исходить также из упрощенных дифференциальных уравнений (6.25), которые являются уравнениями шестого порядка. При этом для каждого края могут быть выполнены только три граничных условия, т.е. в каждом конкретном случае опирания надо отказаться от точного удовлетворения одного из четырех граничных условий для каждого края и довольствоваться приближенным решением. Какое из граничных условий исключается или изменяется, зависит от того, какое из них меньше всего влияет на общий ход деформаций и сдвигающие усилия, действующие на многослойную панель. Целесообразнее действовать аналогично методу раздельных прогибов для многослойных панелей с тонкими внешними слоями, т.е. для двух из трех граничных условий выбирают, как и там, соответственно одинаковые. Кроме того, в качестве третьего граничного условия выступает одно из соотношений (6.33) или (6.34). Например, в случае свободного края с $x = \text{const}$ жесткой на изгиб торцовой панели

$$m_x = 0; \quad \bar{q}_x = q_x + m'_{xy} = 0; \quad \gamma_{xz} = 0.$$

Следовательно, граничные условия совпадают с граничными условиями графы III табл. 3.1, поскольку там изменяются обозначения и в строч-



ках 5—8 вместо поперечной силы вводится сумма поперечной силы и эквивалентного сдвигающего усилия.

6.1.4. Напряжения в многослойной панели. Рассчитав из уравнений (6.16) с учетом граничных условий смещения w , T_{xz} и T_{yz} , можно определить частичные сдвигающие усилия многослойной панели соответственно уравнениям (6.7) — (6.11). С их помощью для нормальных напряжений во внешних слоях и касательных напряжений среднего слоя получаются следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xu,o} &= \frac{1}{t_{u,o}} \left(\frac{D_{xu,o}}{D_x} p_x \pm \frac{1}{a} m_{xs} \right) \pm \frac{Z_{u,o}}{J_{u,o}} m_{xu,o}; \\ \sigma_{yu,o} &= \frac{1}{t_{u,o}} \left(\frac{D_{yu,o}}{D_y} p_y \pm \frac{1}{a} m_{ys} \right) \pm \frac{Z_{u,o}}{J_{u,o}} m_{yu,o}; \\ \tau_{xyu,o} &= \frac{1}{t_{u,o}} \left(\frac{A_{xyu,o}}{A_{xy}} p_{xy} \pm \frac{1}{a} m_{xys} \right) \pm \frac{Z_{u,o}}{J_{u,o}} m_{xyu,o}; \\ \tau_{xzs} &= \frac{1}{a} q_{xs}; \quad \tau_{yzs} = \frac{1}{a} q_{ys}. \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

Следует учесть, что на основании уравнения (5.22) в уравнении (6.35) имеет место

$$\frac{D_{xu}}{D_x} = \frac{D_{yu}}{D_y} = \frac{A_{xyu}}{A_{xy}}; \quad \frac{D_{xo}}{D_x} = \frac{D_{yo}}{D_y} = \frac{A_{xyo}}{A_{xy}}.$$

Кроме напряжений согласно (6.35) во внешних слоях возникают также и касательные напряжения (см. рис. 20). При прямоугольном сечении внешних слоев они соответственно рассчитываются, как в п. 3.1.4, и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz u,o} &= \frac{1}{2} \left(1 \mp 2 \frac{Z_{u,o}}{t_{u,o}} \right) \tau_{xzs} + \frac{3}{2} \left(1 - 4 \frac{Z_{u,o}^2}{t_{u,o}^2} \right) \frac{q_{xu,o}}{t_{u,o}}; \\ \tau_{yz u,o} &= \frac{1}{2} \left(1 \mp 2 \frac{Z_{u,o}}{t_{u,o}} \right) \tau_{yzs} + \frac{3}{2} \left(1 - 4 \frac{Z_{u,o}^2}{t_{u,o}^2} \right) \frac{q_{yu,o}}{t_{u,o}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

6.2. ПРИМЕР МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ, НА КОТОРЫЕ ДЕЙСТВУЮТ ПОПЕРЕЧНЫЕ НАГРУЗКИ: ИЗОТРОПНАЯ МНОГОСЛОЙНАЯ ПАНЕЛЬ С УСИЛЕНИЕМ КРАЕВ, ШАРНИРНО-ОПЕРТАЯ ПО КОНТУРУ

6.2.1. Произвольная поперечная нагрузка. Рассмотрим шарнирно-опертую по контуру, изотропную многослойную панель с толстыми внешними слоями и с шарнирно-закрапленными на них краевыми креплениями под произвольной поперечной нагрузкой $p(x,y)$ (см. рис. 33 и 37). Основными дифференциальными уравнениями являются отношения (6.20) и (6.22) или в расчлененной форме отношения (6.24). Нагрузку на единицу площади [поверхности $p(x,y)$] можно разложить в двойной ряд Фурье [см. (5.66) и (5.67)]. Деформации вводятся также

в качестве тригонометрических двойных рядов с еще неизвестными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} w(x,y) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w_{jk} \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y}; \\ \gamma_{xz}(x,y) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{xz,jk} \cos \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y}; \\ \gamma_{yz}(x,y) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{yz,jk} \sin \frac{j\pi x}{l_x} \cos \frac{k\pi y}{l_y}. \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

Граничные условия данной задачи для краев $x=0$ и $x=l_x$ имеют вид:

$$w=0; \quad m_x=0; \quad m_{xz,0}=0; \quad \gamma_{yz}=0,$$

а для краев $y=0$ и $y=l_y$:

$$w=0; \quad m_y=0; \quad m_{yz,0}=0; \quad \gamma_{xz}=0.$$

Как явствует из уравнений (6.8), (6.15) и (6.37), все граничные условия уже выполнены выражениями (6.37), так как

разложения в ряд для $w, m_x, m_{xz,0}$ и γ_{yz} почленно содержат множитель $\sin(j\pi x/l_x)$, который обращается в нуль для $x=0$ и $x=l_x$;

разложения в ряд для $w, m_y, m_{yz,0}$ и γ_{xz} почленно содержат множитель $\sin(k\pi y/l_y)$, который обращается в нуль для $y=0$ и $y=l_y$. Для выполнения дифференциальных уравнений (6.24) в них подставляют отношения (5.66) и (6.37). Приравниванием коэффициентов получаем $w_{jk}, \gamma_{xz,jk}, \gamma_{yz,jk}$ и после их подстановки в (6.37) получаем полные деформации $w(x,y)$, $\gamma_{xz}(x,y)$ и $\gamma_{yz}(x,y)$. С помощью сокращений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{l_y}{l_x}; \quad \alpha_u = \frac{B_u}{B_s}; \quad \alpha_o = \frac{B_o}{B_o}; \quad \alpha = \frac{B_u+B_o}{B_s}; \quad \beta = \frac{B_s}{A l_y^2}; \\ \xi &= \frac{x}{l_x}; \quad \eta = \frac{y}{l_y}. \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

и

$$L_{jk} = \alpha^2 j^2 + k^2; \quad M_{jk} = 1 + \alpha^2 \beta L_{jk}; \quad N_{jk} = 1 + \alpha M_{jk} \quad (6.39)$$

($j, k=1, 2, 3, \dots$) деформации имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_{jk} l_x^4}{B_s} \frac{\alpha^4 M_{jk}}{\pi^4 L_{jk}^2 N_{jk}} \sin j\pi \xi \sin k\pi \eta; \\ \gamma_{xz} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_{jk} l_x^3}{B_s} \frac{\alpha^3 \beta j}{\pi L_{jk} N_{jk}} \cos j\pi \xi \sin k\pi \eta; \\ \gamma_{yz} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_{jk} l_x^3}{B_s} \frac{\alpha^3 \beta k}{\pi L_{jk} N_{jk}} \sin j\pi \xi \cos k\pi \eta. \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

Частичные сдвигающие усилия многослойной панели получаются с помощью отношений (6.7) — (6.11) в качестве тригонометрических двойных рядов:

$$\left. \begin{aligned} m_{xs} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{jk} l_x^2 \frac{\alpha^2 (\alpha^2 j^2 + \nu k^2)}{\pi^2 L_{jk}^2 N_{jk}} \sin j\pi \xi \sin k\pi \eta; \\ m_{ys} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{jk} l_x^2 \frac{\alpha^2 (k^2 - \nu \alpha^2 j^2)}{\pi^2 L_{jk}^2 N_{jk}} \sin j\pi \xi \sin k\pi \eta; \\ -m_{ys} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{jk} l_x^2 \frac{(1-\nu) \alpha^2 j^2}{\pi^2 L_{jk}^2 N_{jk}} \cos j\pi \xi \cos k\pi \eta; \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
m_{x_{u,0}} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} l_x^2 \frac{\alpha_{u,0} \mathcal{E}^2 (\mathcal{E}^2 j^2 + \nu k^2) M_{jk}}{\pi^2 L_{jk}^2 N_{jk}} \sin j\pi \xi \sin k\pi \eta; \\
m_{y_{u,0}} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} l_x^2 \frac{\alpha_{u,0} \mathcal{E}^2 (k^2 + \nu \mathcal{E}^2 j^2) M_{jk}}{\pi^2 L_{jk}^2 N_{jk}} \sin j\pi \xi \sin k\pi \eta; \\
-m_{xy_{u,0}} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} l_x^2 \frac{\alpha_{u,0} (1-\nu) \mathcal{E}_{jk}^2 M_{jk}}{\pi^2 L_{jk}^2 N_{jk}} \cos j\pi \xi \cos k\pi \eta; \\
q_{xs} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} l_x \frac{\mathcal{E}_j^2}{\pi L_{jk} N_{jk}} \cos j\pi \xi \cos k\pi \eta; \\
q_{ys} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} l_x \frac{\mathcal{E}_k}{\pi L_{jk} N_{jk}} \sin j\pi \xi \cos k\pi \eta; \\
q_{xu,0} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} l_x \frac{\alpha_{u,0} \mathcal{E}_j^2 M_{jk}}{\pi L_{jk} N_{jk}} \cos j\pi \xi \sin k\pi \eta; \\
q_{yu,0} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} l_x \frac{\alpha_{u,0} \mathcal{E}_k M_{jk}}{\pi L_{jk} N_{jk}} \sin j\pi \xi \cos k\pi \eta.
\end{aligned} \tag{6.41}$$

6.2.2. Нагрузка $p(x,y) = p_0 \sin \pi x/l_x \sin \pi y/l_y$. Разложение в ряд Фурье данной функции нагрузки $p(x,y)$ излишне, так как $p(x,y)$ уже состоит из двойной синусоидальной волны. Поэтому в уравнениях (6.40) и (6.41) выпадает знак суммирования, кроме того, необходимо предположить, что $j = 1$ и $k = 1$. Произведем определение численных значений для некоторых точек панели параметров.

I случай: $\mathcal{E} = 1$; $\alpha_u = \alpha_0 = 0,005$; $\beta = 0,75$; $\nu = 0$ и $\gamma = 0,5$.

II случай: $\mathcal{E} = 1$; $\alpha_u = \alpha_0 = 0$; $\beta = 0,75$; $\nu = 0$ и $\gamma = 0,5$.

Результаты представлены в табл. 6.1, где m_{ys} , $m_{yu,0}$, q_{ys} и $q_{yu,0}$ опускаются, так как вследствие $\mathcal{E} = 1$ они равны соответствующим величинам m_{xs} , $m_{xu,0}$, q_{xs} и $q_{xu,0}$. Случай I соответствует многослойной панели с жесткими на изгиб внешними слоями, а случай II — многослойной панели с мягкими на изгиб внешними слоями¹. Из сопоставления обоих случаев в табл. 6.1 очевидно влияние жесткости внешних слоев при изгибе на прогиб и частичные сдвигающие усилия.

6.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

6.3.1. Выражения энергии. Энергия деформации формы W многослойной панели с толстыми внешними слоями при действии на нее поперечных, продольных и сдвигающих сил, как и в п. 5.3.1, определяется из общей формулы (5.100). Если, согласно уравнению (5.11), подставить сюда ϕ_x , ϕ_y , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} согласно (5.7) и ε_x , ε_y , γ_{xy} согласно (6.3), то аналогично расчетам в п. 5.3.1 получим

¹ Поэтому для второго случая можно также использовать уравнения (5.76) — (5.78).

$$W = \frac{1}{2} \iint_{(F)} \left[B_{xz}(\gamma'_{xz} - w'')^2 + B_{yz}(\gamma'_{yz} - w'')^2 + (v_x B_{xz} + v_y B_{yz})(\gamma'_{xz} - w'')(\gamma'_{yz} - w'') + T_{xyz}(\gamma'_{xz} + \gamma'_{yz} - 2w'')^2 + (B_{xu} + B_{yu})w''^2 + (B_{xu} + B_{yu})w''^2 + 4(T_{xyu} + T_{xyv})w''^2 + v_y(B_{xu} + B_{yu})w''w'' + v_x(B_{yu} + B_{xu})w''w'' + A_{xz}\gamma'^2_{xz} + A_{yz}\gamma'^2_{yz} \right] dx dy. \quad (6.42)$$

Т а б л и ц а 6.1. Раздельные прогибы и сдвигающие усилия шарнирно-опертой по контуру многослойной панели к толстым внешним слоям

Величины	ξ	η	$\nu = 0$		$\nu = 0,5$		
			случай I	случай II	случай I	случай II	
w	0,5	0,5	0,01572	0,04056	0,01572	0,04056	$\rho_0 t_x^4 / B_z$
m_{xz}	0,5	0,5	0,00981	0,02533	0,01472	0,038	$\rho_0 t_x^2$
$-m_{yz}$	0	0	0,00981	0,02533	0,00491	0,01267	$\rho_0 t_x^2$
$m_{xu,0}$	0,5	0,5	0,00776	0	0,01164	0	$\rho_0 t_x^2$
$-m_{yu,0}$	0	0	0,00776	0	0,00388	0	$\rho_0 t_x^2$
q_{xz}	0	0,5	0,0617	0,1591	0,0617	0,01591	$\rho_0 t_x$
$q_{xu,0}$	0,5	0	0,0487	0	0,0487	0	$\rho_0 t_x$

В особом случае изотропности уравнение (6.42) несколько упрощается. W , согласно уравнению (6.42), отличается от W по уравнению (5.101) некоторыми дополнительными членами, которые соответствуют компоненту энергии деформации в толстых внешних слоях.

Потенциал внешних сил U принимает ту же форму, что и при многослойных панелях с тонкими внешними слоями [ср. (5.104)].

6.3.2. Метод потенциальной энергии. Принцип минимума потенциала упругости $\Pi = W + U$ справедлив также и для данного случая. Уравнения Эйлера (5.107) для $\Pi = m \ln$ дают уже известные дифференциальные уравнения (6.18) и (6.16). Применяя способ Ритца, необходимо выбрать функции сравнений, которые удовлетворяют как можно большему числу граничных условий. После подстановки в Π получается очень длинное и сложное выражение, так что расчет неизвестных постоянных производится с большим трудом.

6.4. ДРУГИЕ ВИДЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

6.4.1. Температурный скачок между внешними слоями многослойной панели. Здесь интерес представляет температурный скачок только между плоскостями центра тяжести внешних слоев [θ_x и θ_y согласно (5.108)], в то время как равномерные температурные деформации обоих внешних слоев, а также разности температурных продольных деформаций внутри этих слоев остаются без внимания. Если отношения "частичное сдвигающее усилие — деформация" дополнить воздействием температуры, то для m_{xz} и m_{yz} получим дополнительные члены $m_{xz\theta}$ и $m_{yz\theta}$ согласно (5.109), в то время как все остальные частичные сдвигающие усилия, согласно (6.8) — (6.11), остаются неизменными. Подстанов-

ка значений сдвигающих усилий, включая дополнительные члены, в условии равновесия (5.30) при $p = 0$ дает дифференциальные уравнения (6.16), но с превыми частями r_1, r_2, r_3 согласно (5.110) и соответственно с (5.112), а в (6.18) левая часть получается r_4 согласно (5.111) и (5.112). В общем $\varphi_x = \varphi_y = \text{const}$, причем все правые части равны нулю, следовательно, дифференциальные уравнения становятся однородными. Поэтому их общие решения не содержат φ ; φ появляется в расчете только через граничные условия.

6.4.2. Поперечные колебания многослойной панели. Общие динамические основные уравнения получаются путем добавления силы инерции $\mu \partial^2 w / \partial t^2$ к нагрузке на единицу площади $p(x, y, t)$ в дифференциальные уравнения (6.16) и (6.18) соответственно (6.24) и (6.25). Они отличаются от таких же уравнений для многослойных панелей с толстыми внешними слоями только дополнительными членами, происходящими от собственной жесткости внешних слоев при изгибе и кручении. Если в динамические основные уравнения подставить (5.113), то получим дифференциальные уравнения для незатухающих вынужденных поперечных колебаний многослойной панели в установившемся состоянии. Затухание сдвига можно учесть посредством комплексных жесткостей на сдвиг согласно (5.114). Дифференциальные уравнения для незатухающих свободных поперечных колебаний многослойной панели получаются из основных динамических уравнений для $q(x, y, t)$, а также w, γ_{xz} и γ_{yz} согласно (5.113), но при ω_j вместо ω . Уравнение собственных значений для расчета собственных частот ω_j выводится из них с помощью граничных условий панели.

На основании принципа Гамильтона для свободных колебаний панели и здесь получается вариационная задача H^* -экстремум согласно (2.152), где E^* установлено посредством уравнения (5.115), а W^* следует из (6.42), в котором произведена замена w на z_1 , γ_{xz} на z_2 и γ_{yz} на z_3 . Уравнение (2.152) можно использовать для приближенного расчета ω_j .

6.5. ДОПОЛНЕНИЯ

6.5.1. Предел прочности внешних слоев при изгибе и кручении в случае профилированных "сэндвичей". Данные в п. 6.1.1 предпосылки плоских многослойных панелей с толстыми внешними слоями часто не соответствуют действительности: собственные изгибные жесткости $B_{xx}, B_{xy}, B_{yy}, B_{yz}$ и собственные жесткости при кручении T_{xy}, T_{yz} внешних слоев могут зависеть от того, что внешние слои профилированы по направлениям x и y . Рассмотренную теорию многослойных конструкций можно дополнить подобными профилированными "сэндвичами". Для этого необходимо подставить в $B_{xx}, B_{xy}, B_{yy}, B_{yz}$ согласно (6.4), моменты инерции профиля $J_{xx}, J_{xy}, J_{yy}, J_{yz}$ внешних слоев на единицу ширины ($b_y = 1$, соответственно $b_x = 1$), а в $D_{xx}, D_{xy}, D_{yy}, D_{yz}$ согласно (5.13), подставить площади поперечного сечения профиля $F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}, F_{yz}$ внешних слоев на единицу ширины ($b_y = 1$, соответственно $b_x = 1$). Тогда, согласно (5.26), определены и B_{xz} и B_{yz} . Для значений прочности при кручении T_{xy}, T_{yz} и жесткости при сдвиге A_{xy}, A_{yz} внешних слоев могут быть приближенно использованы следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} T_{xy0} &= \sqrt{T_{x0} T_{y0}} ; & T_{xy0} &= \sqrt{T_{x0} T_{y0}} ; \\ A_{xy0} &= \sqrt{A_{x0} A_{y0}} ; & A_{xy0} &= \sqrt{A_{x0} A_{y0}} , \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

где

$$\left. \begin{aligned} T_{xy0} &= G_{x0} J_{txy0} ; & T_{xy0} &= G_{x0} J_{txy0} ; \\ A_{xy0} &= G_{x0} F_{xy0} ; & A_{xy0} &= G_{x0} F_{xy0} . \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

В уравнениях (6.44) G_{x0} означает модуль сдвига соответствующего внешнего слоя в плоскости, проходящей через центр тяжести, а J_{txy0} и F_{xy0} — крутящий момент сечения полосы внешнего слоя на единицу ширины ($b_y = 1$, соответственно $b_x = 1$). С помощью уравнений (6.43) согласно (5.27) определена также и прочность "сэндвича" при кручении T_{xy0} .

Отношения (6.43) могут быть объяснены следующим образом: если профилированный "сэндвич" свести, таким образом, к плоской многослойной панели с ортотропными толстыми внешними слоями, чтобы все значения поперечных сечений совпадали с теми же значениями профилированного "сэндвича", то, согласно (5.12), $M_{xy} = M_{yx}$ и $N_{xy} = N_{yx}$. Поэтому для прочности при кручении или жесткости при сдвиге каждого слоя справедлив соответственно только один параметр, а именно T_{xy0} или A_{xy0} .

П р и м е ч а н и е. Если внешние слои профилированные, но тонкие, то T_{xy0} пропорционально t_{x0}^3 , а $T_{xy0} = t_{x0}^3$; следовательно, T_{xy0} и T_{xy0} можно пренебречь в пользу T_{xy0} . Значениями B_{xy0} и B_{xy0} можно пренебречь в пользу B_{xy0} и B_{xy0} только тогда, когда внешние слои тонкие и, кроме того, плоские.

6.5.2. Круглые многослойные панели, опертые по контуру. При расчете изотропных и опертых по контуру круглых панелей, на которые действуют осесимметрические нагрузки, справедливо все сказанное в п. 5.5.2. Угол сдвига γ_{rx} и все крутящие моменты ($M_{r\theta}, M_{\theta r}, M_{r\theta}$) вследствие осевой симметрии по всей области панели равны нулю. Вместо трех дифференциальных уравнений (6.25) для w и γ_{rx} существуют только первые два уравнения (6.25), но с γ_{rx} вместо γ_{rx} при этом штрих означает, что это производная величина от r , а Δ — оператор Лапласа в полярных координатах.

7. ОБЩАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОК И ПАНЕЛЕЙ

7.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

7.1.1. Что означает понятие "общая потеря устойчивости"? Многослойная балка, на которую действует только осевое сжимающее усилие P , теряет устойчивость в целом, т.е. ее прямое положение становится неустойчивым, когда сжимающее усилие превышает определенную нагрузку P_k , вызывающую потерю устойчивости при продольном изгибе. Так как при $P > P_k$ превышен предел устойчивости всей системы, то в этом случае говорят об общей потере устойчивости балки. То же касается и многослойных панелей: здесь выпучивание многослойной

панели как целого может быть вызвано как осевыми сжимающими усилиями $R_x = -P_x$ и $R_y = -P_y$, так и сдвигающими усилиями R_{xy} .

Помимо общей потери устойчивости многослойных балок и панелей может возникать и местная потеря устойчивости (см. рис. 40), которая будет рассмотрена в следующей главе.

7.1.2. Предпосылки и ход вычисления. Для расчета наименьшей критической нагрузки, вызывающей потерю устойчивости многослойной балки при продольном изгибе, или выпучивания многослойной панели можно основываться на предпосылках пп. 2.1, 3.1, 5.1 и 6.1, а также вытекающих отсюда дифференциальных уравнений. Так как последние были составлены для случая действия на балку изгиба и продольной силы по теории второго порядка, то в них необходимо только приравнять к нулю поперечную нагрузку. После рашения ставших теперь однородными дифференциальных уравнений и выполнения всех граничных условий получим линейную, однородную систему уравнений для постоянных интегрирования, которая только тогда имеет отличные от нуля решения, когда обращается в нуль ее определитель коэффициентов D . Из $D=0$ получается искомое уравнение собственных значений для определения критических нагрузок многослойной балки или панели. Интерес для технической практики представляет только первая критическая нагрузка, вызывающая потерю устойчивости при продольном изгибе, или нагрузка выпучивания).

При этом целесообразно снова прибегнуть к приближенному методу, например методу Ритца. Необходимые для этого выражения потенциальной энергии уже были выведены в пп. 2.3.1, 3.3.1, 5.3.1 и 6.3.1; в них необходимо лишь приравнять к нулю значения, вызванные действием поперечной нагрузки.

Производные справедливы лишь до тех пор, пока относящиеся к критической нагрузке, вызывающей потерю устойчивости при продольном изгибе и выпучивании, напряжения при изгибе и при выпучивании $\sigma_k = P_k / (F_u + F_p)$ внешних слоев расположены в линейной области σ, ϵ — диаграммы материала внешних слоев ($\sigma_k \leq \sigma_p$).

7.2. МНОГОСЛОЙНЫЕ БАЛКИ С ПЛОСКИМИ ТОНКИМИ ВНЕШНИМИ СЛОЯМИ

7.2.1. Определение точной критической нагрузки, вызывающей потерю устойчивости при продольном изгибе. Общие решения дифференциальных уравнений. Основные дифференциальные уравнения даны в (2.25) и (2.26). Если в них подставить $q = 0$ и $N = -p^*$ и ввести безразмерную координату $\xi = x/l$, а также при β , согласно (2.47), безразмерные сокращения:

$$\rho = \frac{p}{A}; \quad \lambda^2 = \frac{\rho l^2}{(1-\rho/A)B_s} = \frac{\rho}{(1-\rho)B}, \quad (7.1)$$

то получим:

$$\left. \begin{aligned} \beta(\gamma'' - w'''/l) &= \gamma; & w'' + \lambda^2 w &= 0; \\ \gamma' &= \rho w''/l; & \gamma'' + \lambda^2 \gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

* $p > 0$ означает, следовательно, осевое сжимающее усилие.

Штрихи в уравнениях (7.2) означают производные по ξ . Если решить оба правых уравнения (7.2) и учесть, что решения должны выполняться и оба левых уравнения (7.2), то после краткого расчета получим:

$$\left. \begin{aligned} w &= C_1 \cos \lambda \xi + C_2 \sin \lambda \xi + C_3 \xi + C_4; \\ \gamma &= \frac{\lambda p}{l} (C_2 \cos \lambda \xi - C_1 \sin \lambda \xi). \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Многослойная балка, шарнирно-опертая по двум сторонам. Для многослойной балки, шарнирно-опертой по двум сторонам (см. рис. 6 и табл. 2.1), справедливы следующие граничные условия:

$$w(0) = 0; \quad \gamma_2'(0) = 0; \quad w(l) = 0; \quad \gamma_2'(l) = 0. \quad (7.4)$$

С учетом $\gamma_2 = \gamma - w'$ уравнения (7.4) и (7.3) дают систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 + C_4 &= 0; \quad C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda + C_3 + C_4 = 0; \\ (1-p)C_1 &= 0; \quad (1-p)(C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Чтобы для постоянных интегрирования иметь отличные от нуля решения, знаменатель определителя системы уравнений должен обратиться в нуль:

$$D = (1-p)^2 \sin \lambda = 0. \quad (7.5)$$

Это уравнение собственных значений для определения критической нагрузки P_k ; оно имеет следующие решения:

$$\sin \lambda = 0; \quad \lambda_j = j\pi (j=1, 2, \dots) \text{ и } p_5 = 1; \quad P_3 = A. \quad (7.6)$$

Если ограничиться первым собственным значением $\lambda_1 = \pi$, подставить его в (7.1) и решить относительно P_k , то получим

$$P_k = \frac{\pi^2 B_3}{l^2 + \pi^2 B_3/A} = \frac{\pi^2}{1 + \pi^2 \beta} \frac{B_3}{l^2}. \quad (7.7)$$

Отсюда следует, что P_k всегда меньше, чем $P_3 = A$, т.е. P_k является критической нагрузкой, вызывающей потерю устойчивости при продольном изгибе. Оба предельных случая $A = \infty$ и $B_3 = \infty$ дают:

$$P_B = \frac{\pi^2 B_3}{l^2}; \quad P_5 = A = \frac{B_3}{\beta l^2}, \quad (7.8)$$

т.е. критические нагрузки многослойной балки, вызывающие потерю устойчивости при продольном изгибе.

Многослойная балка с жестким закреплением опоры слева и шарнирно-опертая справа. Для многослойной балки с жестким закреплением слева и шарнирно-опертой справа (см. рис. 8, табл. 2.1) справедливы следующие граничные условия:

$$w(0) = 0; \quad \gamma_2(0) = 0; \quad w(l) = 0; \quad \gamma_2'(l) = 0. \quad (7.9)$$

Подстановка уравнений (7.3) в (7.9) дает систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 + C_4 &= 0; \quad C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda + C_3 + C_4 = 0; \\ (1-p)C_2 + C_3 &= 0; \quad (1-p)(C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Знаменатель — определитель этой системы уравнений должен обратиться в нуль:

$$D = (1-p)[\lambda(1-p)\cos \lambda - \sin \lambda] = 0. \quad (7.10)$$

Это уравнение собственных значений для определения критической нагрузки P_k . С учетом следующего из уравнений (7.1) отношения

$$1 - \rho = \frac{1}{1 + \lambda^2 \beta}$$

из уравнения (7.10) получим

$$(1 + \lambda^2 \beta) \operatorname{tg} \lambda = \lambda \quad \text{и} \quad P_s = 1, \quad P_s = A. \quad (7.11)$$

Если ограничиться первым собственным значением λ_1 трансцендентного уравнения (7.11), подставить его в уравнения (7.1) и решить относительно P_k , то

$$P_k = \frac{\lambda_1^2 B_s}{l^2 + \lambda_1^2 B_s / A} = \frac{\lambda_1^2}{1 + \lambda_1^2 \beta} \frac{B_s}{l^2}. \quad (7.12)$$

Отсюда следует, что P_k всегда меньше, чем данное в (7.11) второе решение $P_s = A$, поэтому P_k является критической нагрузкой, вызывающей потерю устойчивости при продольном изгибе. Оба предельных случая $A = \infty$ и $B_s = \infty$ дают $\lambda_1 = 4,493$ и $\lambda_1 = \pi$, т.е.

$$P_s = \frac{20,19 B_s}{l^2}; \quad P_s = A = \frac{B_s}{\beta l^2}, \quad (7.13)$$

и являются критическими нагрузками многослойной балки, вызывающими потерю устойчивости при продольном изгибе и сдвиге. P_s согласно (7.13), идентично формуле Эйлера для неподвижной на сдвиг балки с опиранием, как показано на рис. 8.

Другие виды опирания. Критические нагрузки, вызывающие потерю устойчивости при продольном изгибе многослойных балок, которые оперты согласно рис. 5 (одностороннее жесткое закрепление, свободный конец) или согласно рис. 9 (жесткое закрепление с двух сторон), можно свести к критической нагрузке, вызывающей потерю устойчивости при продольном изгибе шарнирно-опертой с двух сторон балки. В первом случае необходимо в уравнении (7.7) заменить l на "свободную длину стержня" $l_k = 2l$, а во втором случае — на "свободную длину стержня" $l_k = l/2$:

$$P_k = \frac{\pi^2 B_s}{(2l)^2 + \pi^2 B_s / A} = \frac{\pi^2}{4 + \pi^2 \beta} \frac{B_s}{l^2} \quad (7.14)$$

или

$$P_k = \frac{\pi^2 B_s}{(l/2)^2 + \pi^2 B_s / A} = \frac{4\pi^2}{1 + 4\pi^2 \beta} \frac{B_s}{l^2}. \quad (7.15)$$

Для предельных случаев $A = \infty$ и $B_s = \infty$ уравнения (7.14) и (7.15) дают следующие выражения:

$$P_s = \frac{\pi^2 B_s}{4l^2} \quad \text{или} \quad P_s = A = \frac{B_s}{\beta l^2} \quad (7.16)$$

и

$$P_s = \frac{4\pi^2 B_s}{l^2} \quad \text{и} \quad P_s = A = \frac{B_s}{\beta l^2}; \quad (7.17)$$

при этом P_s совпадает с соответствующей формулой Эйлера.

7.2.2. Приближенное определение с помощью метода Ритца критической нагрузки, вызывающей потерю устойчивости при продольном изгибе. В качестве примера рассмотрим многослойную балку согласно рис. 8 (жесткое закрепление слева, справа — шарнирное опирание).

Одночленные выражения функций сравнения для w и γ уже было определено в п. 2.3.3; если с целью сокращения числа свободных постоянных в уравнения (2.113) подставить отношение (2.114), то при $p = P/A$ следует, что:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= 2a_1 t^3 x + 3(b_1 - a_1) t^2 x^2 - (a_1 - 5b_1) t x^3 + 2b_1 x^4; \\ \gamma_1 &= 2a_1 t^3 + p[6(b_1 - a_1) t^2 x^2 + 3(a_1 - 5b_1) t x^3 + 8b_1 x^4]. \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

После введения в уравнения (7.18) безразмерной координаты $\xi = x/l$, а также новых постоянных $a_1 t^3 = A_1$ и $b_1 t^3 = B_1$ получим:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= A_1 l (2\xi - 3\xi^2 + \xi^3) + B_1 l (3\xi^2 - 5\xi^3 + 2\xi^4); \\ \gamma_1 &= A_1 (2 - 6p\xi + 3p\xi^2) + B_1 p (6\xi - 15\xi^2 + 8\xi^3). \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Подставив уравнения (7.19) в выражения энергии W согласно (2.94) и U согласно (2.96), причем предполагается, что в U $q = 0$ и $N = -P$, то после выполнения интегрирования получим:

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{B_1}{l} \frac{6}{5} (1-p)^2 (5A_1^2 + 3B_1^2) + A_1 l \frac{2}{35} [7(5-10p+6p^2)A_1^2 + \\ &\quad + 7p^2 A_1 B_1 + 3p^2 B_1^2]; \\ U &= -Pl \frac{2}{35} (7A_1^2 + 7A_1 B_1 + 3B_1^2). \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Минимизирование $\Pi = W + U$ ведет к необходимым условиям:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial B_1} = 0,$$

откуда следуют два линейных, однородных уравнения для A_1 и B_1 . Уравнение собственных значений получается приравнованием к нулю коэффициента определителя системы уравнений. С учетом $\beta = B_1/A_1 t^2$ после некоторого промежуточного расчета получим оба решения:

$$\begin{aligned} (65 + 1692\beta + 3780\beta^2)p^2 - 12(5 + 246\beta + 630\beta^2)p + \\ 1260\beta(1 + 3\beta) = 0 \quad \text{и} \quad p_3 = 1, \quad p_3 = A. \end{aligned} \quad (7.21)$$

После решения квадратичного уравнения (7.21) для p получим два значения p_1 и p_2 ; наименьшая из двух величин (т.е. p_1) является определяющей для расчета критической нагрузки, вызывающей потерю устойчивости при продольном изгибе:

$$p_k = p_1 A = \frac{p_1}{\beta} \frac{B_1}{t^2}. \quad (7.22)$$

Отсюда следует, что p_k всегда меньше, чем данное в уравнении (7.21) второе решение $p_3 = A$, т.е. p_k является критической нагрузкой, вызывающей потерю устойчивости при продольном изгибе. Оба предельных случая $A = \infty$ (т.е. $\beta = 0$ и $p_1 = 0$, но $A\beta = B_1 t^2$ и $A p_1 = p_k$), а также $B_1 = \infty$ (т.е. $\beta = \infty$) дают

$$p_k = \frac{21 B_1}{t^2} \quad \text{и} \quad p_3 = A = \frac{B_1}{\beta t^2}. \quad (7.23)$$

p_3 совпадает с (7.13), а p_k имеет 4% погрешности по сравнению с точным решением (7.13).

Примечание. Если бы функции сравнений (2.113) использовать без учета отношений (2.114), тогда Π нужно было бы минимизировать по четырем (вместо двух) свободным постоянным. После затруднительного расчета все равно бы получили уравнение собственных значений (7.21). Отсюда следует, что наилучшее решение для $\Pi = \min$ такое, при котором условие равновесия поперечной силы (2.110) выполнено на фрагменте балки. При учете уравнения (2.114) в (2.113) данное положение выполнено с самого начала. При решении уравнений (2.113) без учета (2.114), напротив, оно получается только минимизированием Π .

7.2.3. Критическая нагрузка, вызывающая потерю устойчивости при продольном изгибе, по методу единичных жесткостей. Рассматривая отношения (7.7) и (7.8), (7.14) и (7.16), а также (7.15) и (7.17), можно заметить между ними следующую зависимость:

$$\frac{P_k}{P_B} + \frac{P_k}{P_S} = 1; \quad P_k = \frac{P_B P_S}{P_B + P_S}. \quad (7.24)$$

Но для уравнений (7.12) и (7.13) данные выражения недействительны. Если удовлетвориться приближенным решением, тогда истинность отношений (7.24) является общей, т.е. также и для (7.12) и (7.13). В обоих предельных случаях при $A = \infty$ ($\beta = 0$) и $B_S = \infty$ ($\beta = \infty$) уравнения (7.24) дают в каждом случае точные предельные нагрузки, вызывающие потерю устойчивости при продольном изгибе, а именно $P_k = P_B$ и $P_k = P_S \cdot P_k$, согласно (7.24), складывается только из критической нагрузки P_B , которая справедлива для $A = \infty$, т.е. зависит только от изгибной жесткости B_S , и предельной нагрузки P_S , которая справедлива для $B_S = \infty$, т.е. зависит только от жесткости при сдвиге A . Поэтому говорят о методе единичных жесткостей, преимущество которого состоит в том, что P_B для различных случаев опирания часто уже известно из обычной теории балок, а P_S выражено через A ; следовательно, можно легко найти приближенные решения для P_k .

В основе метода единичных жесткостей лежит предпосылка, что отдельные прогибы w_M и w_R , а также общий прогиб w подобны один другому, т.е. имеют одинаковую форму. Это имеет место при собственных функциях многослойных балок, опертых согласно рис. 5, 6 и 8. Поэтому уравнения (7.24) дают точные значения критической нагрузки P для балок с таким опиранием и приближенное значение для балок с опиранием согласно рис. 8.

7.2.4. Численное сравнение трех методов расчета. В заключение для многослойной балки, закрепленной жестко слева и шарнирно-опертой справа (см. рис. 8), необходимо произвести сравнение трех ранее объясненных способов расчета критической нагрузки, вызывающей потерю устойчивости при продольном изгибе. P_k соответственно приводится к форме

$$P_k = c \frac{B_S}{l^2}. \quad (7.25)$$

При изменении параметра β получим табл. 7.1, в которой:

- приближенные значения P_k больше, чем точные значения P_k ;
- способ Ритца кроме очень малых величин β дает несколько меньшие относительные погрешности, чем метод единичных жесткостей;
- расчет критической нагрузки, вызывающей потерю устойчивости при продольном изгибе, методом единичных жесткостей требует самых

Таблица 7.1. Сравнение различными методами предельных нагрузок, вызывающих потерю устойчивости при продольном изгибе

β	Точный метод		Метод Ритца			Метод единичных жесткостей	
	λ	c	p	c	погрешность	c	погрешность
	(7.12)	(7.13)	(7.21)	(7.22)	%	(7.24)	%
0	4,493	20,19	0	21	4	20,19	0
0,00986	4,45	16,569	0,1682	17,059	3	16,839	1,6
0,02175	4,4	13,623	0,3028	13,921	2,2	14,029	3
0,04765	4,3	9,83	0,4742	9,952	1,24	10,29	4,7
0,07724	4,2	7,467	0,581	7,523	0,75	7,888	5,6
0,1119	4,1	5,836	0,6558	5,863	0,46	6,197	6,2
0,1534	4	4,631	0,7125	4,644	0,28	4,927	6,4
0,2709	3,8	2,94	0,7973	2,943	0,1	3,12	6,1
0,4858	3,6	1,776	0,8632	1,777	0,05	1,888	5,2
1,0262	3,4	0,899	0,9224	0,899	0	0,93	3,4
∞	π	0	1	0	0	0	0

наименьших вычислительных затрат и достаточно точен для практических целей.

Данные утверждения сохраняют свою справедливость и для многослойных балок другого вида опирания и даже для многослойных панелей.

7.3. МНОГОСЛОЙНЫЕ БАЛКИ С ПЛОСКИМИ ТОЛСТЫМИ ИЛИ ПРОФИЛИРОВАННЫМИ ВНЕШНИМИ СЛОЯМИ

7.3.1. Определение точной критической нагрузки, вызывающей потерю устойчивости при продольном изгибе. Общие решения дифференциальных уравнений. Основные дифференциальные уравнения выражены уравнениями (3.17) и (3.18). Если в них подставить $q = 0$, $N = -P$ и ввести безразмерные координаты $\xi = x/l$, а также при α и β согласно (3.27) безразмерные сокращения:

$$p = \frac{P}{A}; \quad \nu^2 = \frac{1 + \alpha - p}{\alpha \beta}; \quad \mu^4 = \frac{p}{\alpha \beta^2}, \quad (7.26)$$

то получим:

$$\left. \begin{aligned} \beta(\gamma^4 - w''/l) &= \gamma; \quad -\alpha\beta w'' + (1 + \alpha - p)w'' + p w''/\beta = 0; \\ \gamma' &= p w''/l + \alpha\beta w''/l; \quad -\alpha\beta \gamma'' + (1 + \alpha - p)\gamma'' + p\gamma/\beta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

Штрихи в уравнениях (7.27) означают производные по ξ . Решив два последних уравнения (7.27) и приняв во внимание, что решения первых двух уравнений (7.27) также должны быть выполнены, при

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\nu^4 + 4\mu^4} - \nu^2)}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\nu^4 + 4\mu^4} + \nu^2)} \quad (7.28)$$

после краткого расчета получим:

$$\left. \begin{aligned} w &= C_1 \cos \lambda_1 \xi + C_2 \sin \lambda_1 \xi + C_3 \cosh \lambda_2 \xi + C_4 \sinh \lambda_2 \xi + C_5 \xi + C_6; \\ \gamma &= \frac{\lambda_1}{l}(p - \alpha\beta\lambda_1^2)(C_2 \cos \lambda_1 \xi - C_1 \sin \lambda_1 \xi) + \frac{\lambda_2}{l}(p + \alpha\beta\lambda_2^2)(C_4 \cosh \lambda_2 \xi + \\ &\quad + C_3 \sinh \lambda_2 \xi). \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

Уравнения (7.29) являются исходными отношениями для определения уравнения собственных значений соответствующей задачи потери устойчивости при продольном изгибе.

Многослойная балка, шарнирно-опертая с двух сторон, без торцевой панели. Граничные условия, согласно табл. 3.1, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} w(0) = 0; \quad w''(0) = 0; \quad \gamma'(0) = 0; \\ w(l) = 0; \quad w''(l) = 0; \quad \gamma'(l) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

Первые три отношения (7.30) дают $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $C_5 = 0$. Три последних отношения (7.30) дают систему уравнений для C_2 , C_4 и C_6 , знаменатель определителя которых необходимо приравнять к нулю; после краткого расчета получим

$$D = \lambda_1^2 \lambda_2^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sin \lambda_1 \sinh \lambda_2 = 0. \quad (7.31)$$

В уравнении (7.31) для $P \neq 0$ может исчезнуть только множитель $\sin \lambda_1$, так что из уравнения (7.31) вытекают следующие решения:

$$\sin \lambda_1 = 0; \quad \lambda_{1j} = j\pi \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (7.32)$$

Если ограничиться первым собственным значением $\lambda_{11} = \pi$, подставить его в (7.28), то для критической нагрузки, вызывающей потерю устойчивости при продольном изгибе, получим

$$P_k = \frac{\pi^2(1 + \alpha + \pi^2 \alpha \beta)}{1 + \pi^2 \beta} \frac{B_s}{l^2}. \quad (7.33)$$

Особый случай $\alpha = 0$ дает уже известное отношение (7.7), в то время как предельные случаи $A = \infty$ и $A = 0$ дают

$$P_k = \frac{\pi^2 B}{l^2} \quad \text{и} \quad P_k = \frac{\pi^2 (B_u + B_o)}{l^2}. \quad (7.34)$$

7.3.2. Приближенное определение методом Ритца критической нагрузки, вызывающей потерю устойчивости при продольном изгибе. В качестве примера возьмем многослойную балку согласно рис. 8, имеющую слева закрепление с торцевой панелью, а справа — шарнирную опору без торцевой панели. Одночленное выражение функций сравнения было уже определено в п. 3.3.2. Если в (3.47) ввести безразмерную координату $\xi = x/l$, а также новые постоянные $a, t^3 = A$, $b, t^3 = B$, и $c, t^3 = C$, то получим:

$$w_i = A_i l (3\xi^2 - 5\xi^3 + 2\xi^4); \quad \gamma_i = B_i l (2\xi - \xi^2) + C_i (3\xi - \xi^3). \quad (7.35)$$

Если уравнения (7.35) подставить в выражения энергии W согласно (3.46) и U согласно (2.96), причем в U предполагается, что $q = 0$, а $N = -P$, то после выполнения интегрирования получается:

$$\left. \begin{aligned} W = \frac{B_s}{l} \frac{1}{30} [108(1+\alpha)A_i^2 + 20B_i^2 + 72C_i^2 + 27A_i C_i + 75B_i C_i] + \\ + A l \frac{1}{420} (112B_i^2 + 408C_i^2 + 427B_i C_i); \\ U = -P l \frac{6}{35} A_i^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

Минимизирование $\Pi = W + U$ приводит к трем необходимым условиям:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_i} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial B_i} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial C_i} = 0,$$

откуда следуют три линейных, однородных уравнения для A , B и C . Уравнение собственных значений получается отсюда путем приравнивания к нулю коэффициентного определителя системы уравнений; с учетом $\beta A = B_s/t^2$ и $p = P/A$ после некоторого промежуточного расчета получим

$$[21(1+\alpha)\beta - p](65 + 1692\beta + 3780\beta^2) - 15876\beta^2(2+5\beta) = 0. \quad (7.37)$$

Решение уравнения (7.37) относительно p с учетом $P_k = pA$ и $\beta A = B_s/t^2$ дает следующую критическую нагрузку, вызывающую потерю устойчивости при продольном изгибе:

$$P_k = \left[21(1+\alpha) - \frac{15876\beta(2+5\beta)}{65+1692\beta+3780\beta^2} \right] \frac{B_s}{t^2}. \quad (7.38)$$

Предельные и особые случаи

А. Случай $A = \infty$, следовательно, $\beta = 0$, при $(1+\alpha)B_s = B$ дает

$$P_k = \frac{21B}{t^2}; \quad (7.39)$$

точным значением является $P_k = 20,19 B/t^2$ следовательно, погрешность составляет 4%.

Б. Случай $B_s = 0$, следовательно, $\beta = 0$ и $\alpha = \infty$, но $\alpha\beta = (B_u + B_o)/At^2$, дает

$$P_k = \frac{21(B_u + B_o)}{t^2}. \quad (7.40)$$

Точное значение $P_k = 20,19(B_u + B_o)/t^2$; погрешность составляет 4%.

В. Случай $A = 0$, следовательно, $\beta = 0$, при $\alpha B_s = B_u + B_o$ снова дает уравнение (7.40); погрешность по сравнению с точным значением $P_k = 20,19(B_u + B_o)/t^2$ составляет 4%.

Г. Случай $B_u = 0$, $B_o = 0$, следовательно, $\alpha = 0$, после преобразования уравнения (7.38) дает

$$P_k = \frac{65+180\beta}{65+1692\beta+3780\beta^2} \frac{21B_s}{t^2}. \quad (7.41)$$

Уравнение (7.41) хотя и не совпадает с установленным в п. 7.2.2 решением (7.21), но дает немного других численных значений $c = P_k t^2/B_s$, так как уравнение (7.38) для $\alpha = 0$ неточно переходит в уравнение (7.21) при различных предположениях, использованных в обоих случаях функций сравнения. Согласно (7.35), функции сравнений, ведущие к (7.38) и (7.41), выполняют, кроме всего прочего, граничные условия $w'_1(0) = 0$ и $\gamma'(0) = 0$, что действительно только для $\alpha \neq 0$. Согласно (7.19), функции сравнений, ведущие к (7.21), не выполняют этих граничных условий, следовательно, в случае $\alpha = 0$ они являются более точными (табл. 7.2). Так как отношение (7.38) для всех предельных случаев дает хорошие приближения (максимальная погрешность 4%), то вероятно, что при $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ оно также дает достаточно приближенное значение критической нагрузки P_k , вызывающей потерю устойчивости при продольном изгибе.

Таблица 7.2. Сравнение критических нагрузок, вызывающих потерю устойчивости при продольном изгибе, для $\alpha = 0$ с подобными же нагрузками, приведенными в п. 7.2.

β	Точное значение	(7.21)		(7.41)	
	α	c	погрешность, %	c	погрешность, %
0	20,19	21	4	21	4
0,02175	13,623	13,921	2,2	13,971	2,6
0,07724	7,467	7,523	0,75	7,592	1,7
0,2709	2,940	2,943	0,1	2,983	1,5
	□	0	0	0	0

7.4. МНОГОСЛОЙНЫЕ ПАНЕЛИ С ПЛОСКИМИ ТОНКИМИ ВНЕШНИМИ СЛОЯМИ

7.4.1. Определение точной критической нагрузки, вызывающей выпучивание изотропной, прямоугольной, шарнирно-опертой по контуру многослойной панели с усиленными краями. Общие решения. Основные дифференциальные уравнения для изотропной многослойной панели выражены в (5.36) и (5.37) или, если исходить из раздельных прогибов w_H и w_Q , через отношение (5.55). Если в уравнение (5.55) подставить $p=0$ и $C=0$, а также усилия¹

$$P_x = -P_y, \quad P_y = -P_x, \quad P_{xy} = -P_{xy}, \quad (7.42)$$

то непосредственно получим

$$w_Q = -\frac{B_5}{A} \Delta w_H, \quad \frac{B_5}{A} \Delta \Delta w_H + \frac{P_x}{A} w'' + \frac{P_x}{A} w'' + \frac{2P_{xy}}{A} w'' + \frac{P_y}{A} w'' = 0. \quad (7.43)$$

Предположим затем, что касательная сила $P_{xy}=0$. Если в (7.43) ввести выполняющее все граничные условия выражение

$$w_H = C \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y}, \quad (7.44)$$

то, введя безразмерные величины:

$$\alpha = \frac{l_y}{l_x}; \quad \beta = \frac{B_5}{A l_x^2}; \quad r = \frac{\pi^2 \beta}{\alpha^2}, \quad (7.45)$$

из первого уравнения (7.43) получим

$$w_Q = Cr(j^2 \alpha^2 + k^2) \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y},$$

а тем самым с учетом $w = w_H + w_Q$ и второго уравнения (7.43) после приравнивания коэффициентов в $C \sin(j\pi x/l_x) \sin(k\pi y/l_y)$ получим, наконец,

$$\alpha^2 j^2 P_x + k^2 P_y = \frac{\pi^2 (\alpha^2 j^2 + k^2)^2}{1 + r (\alpha^2 j^2 + k^2) l_y^2} \frac{B_5}{l_y^2}. \quad (7.46)$$

¹ $P_x > 0$ и $P_y > 0$ означают осевые сжимающие усилия.

Уравнение (7.46) является общим уравнением собственных значений для данного случая опирания, из которого могут быть рассчитаны критическая нагрузка, вызывающая выпучивание многослойной панели. Для наглядности ограничимся двумя особыми случаями.

Одноосная нагрузка прямоугольной многослойной балки. Пусть $P_y = 0$, тогда для P_x из уравнения (7.46) следует, что

$$P_{xjk} = C_{xjk} \frac{B_s}{t_s^2}, \quad C_{xjk} = \frac{\pi^2 (\alpha^2 j^2 + k^2)^2}{\alpha^2 j^2 [1 + r(\alpha^2 j^2 + k^2)]} \quad (7.47)$$

Для определения критической нагрузки, вызывающей выпучивание P_{xk} , необходимо минимизировать C_{xjk} , согласно (7.47), относительно j и k , при этом для j и k должны получиться целые числа. Выражение (7.44) необходимо выбрать таким образом, чтобы на область прямоугольной панели приходилось соответственно целое число полуволен синусоиды в направлении x и y , чтобы были выполнены граничные условия. Ясно, что вследствие $P_y = 0$ конфигурация выпучивания в направлении y состоит только из полуволны синусоиды. Следовательно, в (7.47) необходимо предположить, что $k = 1$, чтобы C_{xjk} была как можно меньше, тогда она упрощается в следующее выражение:

$$C_{xj} = \frac{\pi^2 (1 + \alpha^2 j^2)^2}{\alpha^2 j^2 [1 + r(1 + \alpha^2 j^2)]} \quad (7.48)$$

Число j полуволен синусоиды по направлению x , напротив, зависит от α и r определяется следующим образом:

а) *очень длинная панель* ($\alpha \rightarrow 0$). При этом число волн при выпучивании по направлению x большое, так что оба края панели при $x = 0$ и $x = l_x$ практически не влияют на критическую нагрузку, вызывающую выпучивание. Поэтому j может рассматриваться как непрерывная переменная; из $dc_{xj}/dj = 0$ после кресткого расчета следует, что

$$\left. \begin{aligned} j &= \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}, \quad C_x = \frac{4\pi^2}{(1+r)^2} \text{ для } r < 1; \\ j &= \infty, \quad C_x = \frac{\pi^2}{r} \text{ для } r \geq 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.49)$$

Длина волн выпучивания в направлении x составляет:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{l_x}{j} = l_y \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \text{ для } r < 1; \\ a_x &= 0 \text{ для } r \geq 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.50)$$

Значение $C_x = \pi^2/r$, указанное для случая $r \geq 1$, соответствует $P_x = A$ и означает чистое выпучивание при сдвиге;

б) *очень узкая панель* ($\alpha \rightarrow \infty$). Устанавливается только одна волна выпучивания в направлении x ($j = 1$); оба края панели при $y = 0$ и $y = l_y$ практически не влияют на критическую нагрузку, вызывающую выпучивание. Вследствие $\alpha \rightarrow \infty$, но $\alpha^2 r = \pi^2 \beta$ и $C_x l_y^2 = C_x \alpha^2 / l_x^2$ из уравнений (7.47) и (7.48) следует, что

$$P_{xk} = \frac{\pi^2}{1 + \pi^2 \beta} \frac{B_s}{t_s^2} \quad (7.51)$$

Уравнение (7.51) совпадает с отношением (7.7), которое справедливо для случая шарнирно-опертой с двух сторон многослойной балки;

в) панель с произвольным соотношением сторон α . Устанавливается такое целое число волн выпучивания j , которое как можно ближе приближается к любому значению j согласно (7.49). Например, граница между одной и двумя волнами выпучивания в направлении x получается приравниванием c_{x1} и c_{x2} при соотношении сторон

$$\alpha_{12} = \sqrt{\frac{5r + \sqrt{16 + 9r^2}}{8(1-r)}}; \quad (7.52)$$

для $\alpha > \alpha_{12}$ $j=1$ дает меньшую критическую нагрузку, вызывающую выпучивание ($P_{xk} = c_{x1} B_s / l_x^2$) и для $\alpha < \alpha_{12}$ $j=2$ ($P_{xk} = c_{x2} B_s / l_x^2$). Аналогично получаем α_{23} из $c_{x2} = c_{x3}$, α_{34} из $c_{x3} = c_{x4}$ и т.д. Табл. 7.3 дает числовое определение для некоторых значений r . Зная соотношения граничных сторон α_{12} , α_{23} , α_{34} и т.д., можно численно определить уравнение (7.48). При данных значениях α и r на основании табл. 7.3 можно сразу заключить, какое значение j в уравнении (7.48) даст наименьший коэффициент выпучивания c_x . Например, $\alpha = 1$, $r = 0,4$; тогда при $\alpha_{12} = 1,134 > \alpha = 1 > \alpha_{23} = 0,634$ определяющим является $j=2$, и в этом случае получим $c_x = 2,083 \pi^2$. Графическое представление характеристики коэффициента выпучивания c_x в зависимости от α и r дано на рис. 38. Согласно рисунку, коэффициенты выпучивания c_x для возрастающего $1/\alpha$, т.е. для убывающего α , очень быстро приближаются к коэффициенту выпучивания c_x , согласно (7.49), для $\alpha = 0$, поэтому соотношения (7.49) уже являются для $\alpha < 0,5$ хорошим приближением.

Двухосное напряженное состояние в квадратной многослойной панели. Допустим, что $P_y \neq 0$ и, чтобы из-за обилия параметров не нарушить наглядности, $\alpha = 1$, т.е. $l_x = l_y = l$. При

$$z = P_y / P_x \quad (7.53)$$

из уравнения (7.46) следует, что

$$P_{ijk} = c_{ijk} \frac{B_s}{l^2}, \quad c_{ijk} = \frac{\pi^2(j^2 + k^2)^2}{(j^2 + zk^2)[1 + r(j^2 + k^2)]}. \quad (7.54)$$

Значение z , согласно (7.53), может также стать отрицательным, когда P_y является растягивающим усилием. $z > 1$, следовательно, $P_y > P_x$ в дальнейшем надо будет исключить, так как в случае квадратной панели систему координат всегда можно взять таким образом, что направление x совпадает с направлением наибольшего сжимающего усилия и z будет меньше 1.

Для определения критической нагрузки P_{xk} , вызывающей выпучивание, необходимо минимизировать c_{ijk} согласно (7.54) относитель-

Таблица 7.3. Соотношение граничных сторон и соответствующие коэффициенты выпучивания в зависимости от r

j	$r =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	1
1	α_{12}	0,707	0,792	0,888	1	1,134	1,519	∞
	$c_x \pi^2$	4,5	3,632	2,988	2,5	2,122	1,588	1
2	α_{23}	0,408	0,453	0,504	0,563	0,634	0,837	∞
	$c_x \pi^2$	4,167	3,416	2,851	2,414	2,07	1,572	1
3	α_{34}	0,289	0,32	0,355	0,396	0,445	0,585	∞
4	$c_x \pi^2$	4,083	3,361	2,814	2,391	2,056	1,568	1

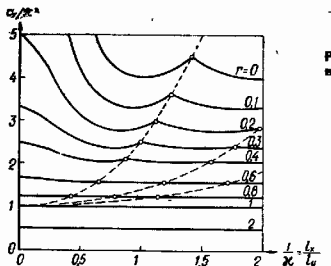


Рис. 38. Коэффициент выпучивания C_x в зависимости от x и r

но j и k . Ясно, что вследствие $P_y < P_x$ и квадратной формы панели конфигурация выпучивания в направлении y состоит только из одной полуволны синусоиды. Следовательно, в (7.54) надо предположить, что $k=1$, тогда

$$C_{xy} = \frac{\pi^2(1+j^2)^2}{(j^2+z)[1+r(1+j^2)]} \quad (7.55)$$

Напротив, число j полуволн синусоиды по оси x зависит от z и r и определяется следующим образом: соотношение предельных продольных усилий Z_{12} , при котором конфигурация выпучивания с одной полуволной синусоиды по оси x переходит в конфигурацию выпучивания с двумя полуволнами синусоиды, получается путем приравнивания C_{x1} и C_{x2} . Соответственно Z_{23} и Z_{34} определяются из $C_{x2}=C_{x3}$ и $C_{x3}=C_{x4}$. Получаем:

$$Z_{12} = \frac{-3+10r}{7+10r}; \quad Z_{23} = \frac{-7+10r}{3+10r}; \quad Z_{34} = \frac{-143+170r}{27+170r} \quad (7.56)$$

Следовательно, для $1 \geq z \geq Z_{12}$ $j=1$ дает наименьшую критическую нагрузку, вызывающую выпучивание ($P_{кx} = C_{x1} B_x / l_x^2$), для $Z_{12} \geq z \geq Z_{23}$ значение $j=2$ и т.д. Из табл. 7.4 получаем числовое определение уравнения (7.56) для некоторых значений r . Зная соотношения предельных осевых усилий Z_{12} , Z_{23} , Z_{34} и т.д., можно использовать уравнение (7.55): при данных значениях z и r из табл. 7.4 сразу можно заключить, какое значение j в (7.55) дает наименьший коэффициент выпучивания.

Пример: $z=0$, $r=0.4$. Вследствие $Z_{12}=0.091 > z=0 > Z_{23}=-0.429$ определяющим является $j=2$. Таким образом, получим, что $C_x = 2.091 \pi^2$. Графическое представление характеристики коэффициента выпучивания C_x в зависимости от z и r дано на рис. 39. Коэффициенты выпучивания C_x с убывающим z становятся все больше, следовательно, растягивающие усилия $P_y < 0$ придают жесткость многослойной панели относительно нагрузки при выпучивании $P_y > 0$ по оси x .

П р и м е ч а н и е. Определение критической нагрузки, вызывающей выпучивание прямоугольной панели, на которую действуют двухосные напряжения, может осуществляться так же, как и при квадратной панели. Но в C_{xy} нельзя изначельно предположить, что $k=1$; кроме j необходимо также варьировать и k , чтобы определить наименьшее значение C_x при данных значениях параметра z , r и α .

Рис. 39. Коэффициент выпучивания C_X в зависимости от z и r

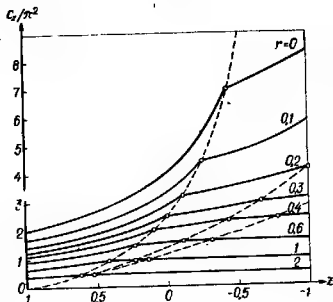


Таблица 7.4. Соотношения предельных осевых усилий и соответствующие коэффициенты выпучивания в зависимости от r

$r =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	1
z_{k2}	-0,429	-0,25	-0,111	0	0,091	0,231	0,412
C_X/π^2	7	4,444	3,214	2,5	2,037	1,477	0,944
z_{k1}	-2,333	-1,5	-1	-0,667	-0,429	-0,111	0,231
C_X/π^2	15	6,667	4,167	3	2,333	1,607	0,985
z_{k4}	-5,296	-2,864	-1,787	-1,179	-0,789	-0,318	0,137
C_X/π^2	27	8,148	4,621	3,197	2,436	1,645	0,995

7.4.2. Приближенное определение методом Ритца критической нагрузки, вызывающей выпучивание. Основное в отношении приемов расчета уже было сказано в п. 5.3.2. Необходимые выражения энергии даны в уравнениях (5.101) – (5.105). Но тем не менее обнаруживается, что энергетический метод для определения критической нагрузки, вызывающей выпучивание многослойных панелей, численно очень сложен, так как для w , T_{xz} и T_{yz} , а также w_M и w_R необходимо ввести три или две¹ отдельные функции сравнения таким образом, чтобы:

все три или две конфигурации волн выпучивания были совместимы одна с другой;

все геометрические, а по возможности и динамические граничные условия были выполнены по всем четырем краям прямоугольной панели;

в выражениях содержалось достаточно много параметров конфигураций волн (как, например, j и k в п. 7.4.1), чтобы при минимизировании P по этим параметрам получить как можно лучшее приближение к точной конфигурации выпучивания. Вычислительные затраты бывают приемлемы только при простых граничных условиях. Например, при применении раздельных прогибов w_M и w_R для прямоугольной панели могут быть использованы следующие функции сравнения:

¹ При обычных, т.е. жестких на сдвиг панелях, имеется только одна функция, а именно для w .

шарнирное опирание по контуру

$$w_M = C \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y}, \quad w_Q = D \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y}; \quad (7.57)$$

жесткое закрепление по контуру

$$\left. \begin{aligned} w_M &= C \sin \frac{\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{\pi y}{l_y} \sin \frac{k\pi y}{l_y}; \\ w_Q &= D \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y}; \end{aligned} \right\} \quad (7.58)$$

шарнирное опирание по краям, параллельным оси x , и закрепление по краям, параллельным оси y

$$\left. \begin{aligned} w_M &= C \sin \frac{\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y}; \\ w_Q &= D \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y}. \end{aligned} \right\} \quad (7.59)$$

Выражения (7.57) по (7.59) для w_M и w_Q выполняют данные в графе Y табл. 5.1 граничные условия. w_M и w_Q имеют те же узловые линии и содержат те же самые параметры конфигураций волн j и k . Следовательно, минимизирование вытекающей из энергетического метода силы $P_x = P_x(j, k)$ по j и k определенно возможно и дает искомую критическую нагрузку P_k , вызывающую выпучивание.

7.4.3. Критическая нагрузка, вызывающая выпучивание, рассчитанная по методу единичных жесткостей. Из уравнения (7.46) с учетом z , согласно (7.53), для шарнирно-опертой по контуру, прямоугольной многослойной панели легко следует, что

$$P_{xjk} = \frac{\pi^2 (\alpha^2 j^2 + k^2)^2}{(\alpha^2 j^2 + z k^2) [1 + r(\alpha^2 j^2 + k^2)] l_y^2} \frac{B_s}{l_y^2}. \quad (7.60)$$

При $A = \infty$, $r = 0$ и конечной жесткости на изгиб B_s

$$P_{xBjk} = \frac{\pi^2 (\alpha^2 j^2 + k^2)^2}{\alpha^2 j^2 + z k^2} \frac{B_s}{l_y^2}. \quad (7.61)$$

При $B_s = \infty$, $r = \infty$ и конечной жесткости на сдвиг A

$$P_{xSjk} = \frac{\alpha^2 j^2 + k^2}{\alpha^2 j^2 + z k^2} A. \quad (7.62)$$

Можно доказать, что между уравнениями (7.60), (7.61) и (7.62) существует зависимость

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_{xjk}}{P_{xBjk}} + \frac{P_{xjk}}{P_{xSjk}} &= 1, \\ P_{xjk} &= \frac{P_{xBjk} P_{xSjk}}{P_{xBjk} + P_{xSjk}} \end{aligned} \right\} \quad (7.63)$$

Формально (7.63) совпадает с (7.24) для многослойных балок. Но все-таки имеется существенное различие. При многослойных балках определенные при $j = 1$ наименьшие критические нагрузки P_B и P_S , вызывающие потерю устойчивости при продольном изгибе, в предельных случаях $A = \infty$ и $B_s = \infty$, необходимо подставить в уравнение (7.24). Напротив, в случае многослойных панелей силы P_{xBjk} и P_{xSjk} , содержащие еще параметры конфигураций волн j и k , надо подставить в (7.63). Только после их подстановки P_{xjk} можно минимизировать, откуда

затем следует наименьшая критическая нагрузка P_{jk} , вызывающая выпучивание.

Пример: многослойная панель с $z=0$, $\alpha=1$ и $r=0,4$. Согласно п. 7.4.1, здесь $k=1$, поэтому следует минимизировать только по j .

Минимизирование P_{kj} : уравнения (7.61) и (7.62) для $k=1$ дают:

$$P_{kj} = \frac{\pi^2(1+j^2)}{j^2} \frac{B_s}{l_y^2}; \quad P_{ksj} = \frac{1+j^2}{j^2} A. \quad (7.64)$$

Подстановка в (7.63) с учетом r , согласно (7.45), дает

$$P_{kj} = \frac{\pi^2(1+j^2)^2}{j^2[1+r(1+j^2)]} \frac{B_s}{l_y^2}. \quad (7.65)$$

Минимум P_{kj} получается из табл. 7.3 для значения $j=2$, следовательно,

$$P_{jk} = 2,083\pi \frac{B_s}{l_y^2} = 20,56 \frac{B_s}{l_y^2}. \quad (7.66)$$

Раздельное минимизирование P_{ksj} и P_{ksj} : минимум P_{ksj} и P_{ksj} , согласно (7.64), получается из табл. 7.3 в случае P_{ksj} для значения $j=1$ и в случае P_{ksj} для $j=\infty$; следовательно:

$$P_{ks} = 4\pi^2 \frac{B_s}{l_y^2}; \quad P_{ks} = A. \quad (7.67)$$

После подстановки (7.67) в (7.63) имеем

$$P_{jk} = 1,536\pi^2 \frac{B_s}{l_y^2} = 15,18 \frac{B_s}{l_y^2}. \quad (7.68)$$

Уравнение (7.68) не совпадает с (7.66) и поэтому неправильно. Следовательно, минимизирование относительно параметра конфигурации волн можно предпринять только для P_{kj} после подстановки P_{ksj} и P_{ksj} в (7.63), а не для P_{ksj} и P_{ksj} по отдельности перед подстановкой в (7.63).

Описанный только что метод единичных жесткостей является, как упомянуто в п. 7.2.3, точным в том случае, когда раздельные прогибы w_n и w_q :

подобны один другому, т.е. имеют одинаковую форму;

содержат одинаковые параметры конфигурации волн (j и k), по которым затем надо минимизировать $P_{j,k}$, согласно (7.63), в качестве функции этих параметров.

Подобие w_n и w_q , например, справедливо для шарнирно-опертой по контуру, многослойной панели (см. п. 7.4.1), для других же случаев опирания, например частично закрепленных многослойных панелей, — нет. Но если ограничиться приближенными решениями, тогда правильность отношения (7.63) можно требовать лишь в общих чертах; существенно лишь, что $P_{ksj,k}$ и $P_{ksj,k}$ содержат одинаковые параметры конфигурации волн. Преимущество метода отдельных жесткостей заключается в том, что $P_{ksj,k}$ для жестких на сдвиг и $P_{ksj,k}$ для жестких на изгиб панелей часто уже известны или их относительно легко определить, например, энергетическим методом. Следовательно, можно быстро достичь решений для критической нагрузки P_{jk} многослойной панели, вызывающей выпучивание.

7.4.4. Разнообразие расчетов многослойных панелей. На основании двухмерности многослойных панелей разнообразие расчетов критической нагрузки, вызывающей выпучивание, несравненно больше, чем при многослойных балках. Критическая нагрузка, вызывающая выпучивание многослойной панели, зависит от:

формы горизонтальной проекции многослойной панели; наиболее распространенными формами являются прямоугольник и круг, а также встречаются треугольник, параллелограмм и трапеция;

вида опирания многослойной панели; прямоугольная панель, например, имеет четыре края, каждый из которых может быть шарнирно-опертым, закрепленным или свободным соответственно с усилением или без усиления краев;

нагрузки на многослойную панель; нагрузка может состоять из продольных сил или сдвигающих усилий. Продольные силы прилагают одноосно или двучосно; их распределение вдоль x и y может быть постоянным (чистое давление или растяжение), линейно-переменным (давление плюс изгиб в плоскости панели) или нелинейным;

свойств материала многослойной панели; оба внешних слоя могут быть из одинаковых или различных материалов. Материал внешнего и среднего слоев может быть изотропным, ортотропным или анизотропным, материал внешнего слоя — линейно-упругим или (в упрощенном представлении) идеально-упругим — идеально-пластичным, так что при случае может возникать пластическая потеря устойчивости при продольном изгибе или выпучивание.

Разнообразие возможностей расчета настолько велико, что невозможно даже попытаться дать хотя бы приблизительно исчерпывающего представления о них. Относительно потери устойчивости при продольном изгибе в пластической области некоторые основные данные можно найти также в п. 8.4.4.

7.5. МНОГОСЛОЙНЫЕ ПАНЕЛИ С ПЛОСКИМИ ТОЛСТЫМИ ИЛИ ПРОФИЛИРОВАННЫМИ ВНЕШНИМИ СЛОЯМИ

Расчет критической нагрузки многослойных панелей с плоскими толстыми или профилированными внешними слоями осуществляется еще сложнее, чем в случае многослойных панелей с тонкими внешними слоями, так как:

имеют место дифференциальные уравнения восьмого, а не шестого порядка;

по каждому краю прибавляется еще по одному граничному условию; наблюдается еще большее разнообразие комбинационных возможностей относительно формы горизонтальной проекции, опирания, нагрузки и свойств материала. Лишь для шарнирно-опертой по контуру прямоугольной или круглой панели с шарнирно-присоединенным к ней краевым усилением (см. рис. 37) можно сравнительно просто определить критические нагрузки, вызывающие выпучивание.

С другой стороны, при многослойных панелях с плоскими, толстыми или профилированными внешними слоями критические нагрузки, вызывающие выпучивание, не представляют практического интереса, так как, например, при трапециевидальной многослойной конструкции в качестве элемента крыши нагрузка действует преимущественно в попереч-

ном направлении и значительно реже в продольном. Поэтому в рамках данной книги мы отказались от расчета критических нагрузок, вызывающих выпучивание многослойных панелей данного вида.

В. МЕСТНАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ (СМЯТИЕ) В МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛКАХ И ПАНЕЛЯХ

В.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В.1.1. Что такое "местная потеря устойчивости"? Многослойная балка может стать неустойчивой, не только когда она под действием сжимающего усилия выпучивается как целое (общая потеря устойчивости), но и когда тонкостенные части такой балки подвергаются местным смятиям при продольном изгибе или короблению. Напримар, один и оба внешних слоя балки теряют устойчивость вследствие действующего на него или на них сжимающего напряжения (рис. 40) или стенки сотовидного среднего слоя (см. рис. 19) теряют устойчивость вследствие имеющихся в них напряжений сдвига. Следовательно, местная потеря устойчивости является причиной превышения границы устойчивости многослойной балки. В этом случае говорят о смятии внешних слоев или стенок сот многослойной балки. То же самое касается и многослойных панелей.

Если общая потеря устойчивости многослойной панели происходит только тогда, когда нагрузка состоит из чисто осевых сжимающих или сдвигающих усилий¹, то местная потеря устойчивости может возникать и при чистом, вызванном лишь поперечными нагрузками изгибе. Как осевое сжимающее усилие N , так и изгибающий момент M вызывают собственно сжимающие напряжения внешних слоев: в случае N — в обоих внешних слоях и в случае M — в одном из внешних слоев. Внешний слой выпучивается (сминается), как только имеющееся в нем сжимающее напряжение (все равно, вызвано оно N или M) превысит определенную критическую величину, напряжение смятия σ_K (см. рис. 40).

В.1.2. Предпосылки и ход вычислений. Для расчета напряжения смятия внешних слоев σ_K многослойной панели предположим, что внешние слои — плоские пластины, упруго расположенные на среднем слое. При этом исходим из следующих предпосылок:

средний слой состоит из линейно-упругого, изотропного материала; внешние слои плоские, равномерной толщины, достаточно тонкие, имеют бесконечную протяженность в одном из координатных направлений, именуемом осью x , и состоят также из линейно-упругого, изотропного материала; пластическое смятие внешних слоев не рассматривается;

осевые нормальные силы во внешних слоях N_x и N_y постоянны по всей зоне панели; по крайней мере одна из двух (а именно N_x) является сжимающим усилием.

¹ Если бы дополнительно имелась поперечная нагрузка, тогда бы речь не шла больше о проблеме устойчивости, а имелась бы проблема напряжений по теории второго порядка.



Рис. 40. Общая и местная потери устойчивости многослойной балки

При таких условиях внешний слой, в котором действует сжимающее напряжение, выпучивается в направлении z после превышения границы устойчивости. При этом по всей зоне панели появляются равномерные синусоидальные волны смятия (рис. 41):

$$w(x, y, z=0) = w_0 \sin \frac{\pi x}{a_x} \sin \frac{\pi y}{a_y}, \quad (8.1)$$

которые распространяются от внешних слоев, а также от поверхности среднего слоя. Возникающие при этом контактные силы $p(x, y)$ между внешним слоем и поверхностью среднего слоя оказываются распределенными также в форме синусоидальных волн:

$$p(x, y) = p_0 \sin \frac{\pi x}{a_x} \sin \frac{\pi y}{a_y}. \quad (8.2)$$

Следовательно, коэффициент балластной постели $k = w(x, y, z=0)/p(x, y)$, а также его обратная величина, коэффициент жесткости $c = 1/k$ независимы от x и y :

$$k = \frac{w_0}{p_0}; \quad c = \frac{p_0}{w_0}. \quad (8.3)$$

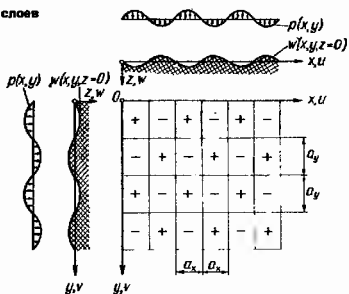
При известном c расчет напряжения смятия внешних слоев возможен без каких бы то ни было существенных затруднений; для заданного соотношения нормальных сил $z = n_y/n_x$ оно получается из первого собственного значения внешнего слоя многослойной конструкции, рассчитанного как для упругой пластины.

Возникает вопрос, насколько созданные предпосылки расчета соответствуют действительности. Обратимся сначала к среднему слою. Если, например, он состоит из синтетического пеноматериала, то:

линейный характер между напряжениями и деформациями в большинстве случаев наблюдается только на начальном этапе нагрузки. Но так как непосредственно после превышения границы смятия деформации еще очень малы, то они приходятся на линейную область;

модули упругости в зоне давления и растяжения (E_d и E_x) могут отличаться один от другого (часто $E_x > E_d$, например, в случае пенополиуретана). Так как синусоидальные волны смятия попеременно входят и выходят из сардечника, т.е. действуют на него по зонам с сжатием и растяжением, то можно с достаточным приближением использовать единое среднее значение $E_k = (E_d + E_x)/2$;

изотропность синтетического пеноматериала гарантирована только при шарообразной форме пор. Однако в большинстве случаев возникают продолговатые (вытянутые) поры, форма которых обусловлена



процессом всленивания, вследствие чего постоянные значения упругости становятся зависимыми от направления. Следовательно, материал среднего слоя анизотропен. Однако при смятии внешних слоев средний слой воспринимает нагрузку в основном только в определенном направлении, например в случае многослойной балки, протяженной в направлении x , это E_x и G_{xz} . Поэтому E_x и G_{xz} определяются как постоянные упругости E и G изотропного материала среднего слоя, с помощью которого проводится дальнейший расчет. Это относится также и к многослойным панелям.

А теперь несколько слов о внешних слоях. В большинстве случаев они состоят из тонких металлических листов. При этом предполагаемая плоскостность внешнего листа многослойной панели справедлива лишь в ограниченном порядке, так как лист имеет небольшие выпучивания, обусловленные техническим процессом производства. Сжимающие усилия, действующие во внешнем слое — листе, вызывают изгибающие моменты, в результате чего проблема устойчивости переходит в проблему напряженных состояний теории второго порядка для листа. Таким образом, предельная нагрузка многослойной балки может снижаться за пределы нагрузки смятия, т.е. становиться ниже той нагрузки, при которой в листе, испытывающем сжимающее напряжение, достигается теоретическое напряжение смятия σ_k . Однако сначала такие влияния предварительного выпучивания остаются неучтенными.

Можно исходить из бесконечного протяжения внешних слоев в направлении x , поскольку длина a_x установившихся волн смятия в большинстве случаев меньше по сравнению с длиной панели l_x . Влияние граничных условий внешних слоев на длину волн смятия a_x в средней зоне панели, а следовательно, и на напряжение смятия незначительно. Поэтому им можно также пренебречь, что соответствует бесконечному протяжению внешних слоев.

Предполагаемое постоянство продольных сил N_x и N_y по всей зоне внешних слоев имеет место, если на многослойную панель действуют только нормальные нагрузки, введенные по краям панели. Напротив, если в пролете панели действуют поперечные нагрузки, тогда N_x и N_y изменяются с изгибающими моментами M_x и M_y согласно $N_x = \pm M_x/a$ и

$n_y = \pm m_y/a$. В таких случаях максимальные значения n_x и n_y приближенно принимаются как действующие по всей зоне панели. Теперь можно произвести расчет коэффициента жесткости с среднего слоя и с его помощью определить напряжения смятия σ_k внешнего слоя, на который действуют сжимающие напряжения.

8.2. КОЭФФИЦИЕНТ ЖЕСТКОСТИ СРЕДНЕГО СЛОЯ

8.2.1. Основные уравнения упругости и общие рашенип. При расчете общего пространственного напряженного состояния в среднем слое под действием поверхностной нагрузки $p(x, y)$ согласно уравнению (8.2), можно идти двумя путями.

В условиях равновесия элемента пинейной упругости поведения материалов и основанных на этом, отношениях "перемещения — деформации" исключают смещения в пользу напряжений, при этом получаются основные уравнения Бептрами для пространственного, упругого континуума. Решением этих уравнений и выполнением всех граничных условий можно определить w_0 , а тем самым и c .

Из тех же исходных уравнений исключают напряжения в пользу смещений, при этом получаются основные уравнения Лямэ пространственного, упругого континуума. Решением этих уравнений и удовлетворением граничных условий можно также рассчитать w_0 , а тем самым и c . Второй путь более удобный, поэтому будем пользоваться им.

При отсутствующих динамических силах основные уравнения перемещений выглядят следующим образом:

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0; \quad \Delta v + \frac{1}{1+2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0; \quad \Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0; \quad (8.4)$$

$$\text{при этом} \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (8.5)$$

означает объемное расширение континуума. Следовательно, речь идет о система трех связанных одно с другим частных дифференциальных уравнений для трех перемещений u, v и w .

На основе допущенных в п. 8.1.2 предпосылок с сокращениями $\alpha_1 = \pi/a_x$ и $\alpha_2 = \pi/a_y$, выражения перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= h_1(z) \cos \alpha_1 x \sin \alpha_2 y; & v &= h_2(z) \sin \alpha_1 x \cos \alpha_2 y; \\ w &= h_3(z) \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

можно подставить в уравнения (8.4). При этом тригонометрические функции исчезают и остается только система трех связанных один с другим, обычных дифференциальных уравнений для трех функций $h_1(z)$, $h_2(z)$ и $h_3(z)$. Ход решения в данном случае подробно не описывается. После продолжительного расчета при

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{a_x}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{a_y}, \quad \lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \quad (8.7)$$

и с произвольными постоянными A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 и B_3 получим общие решения:

$$\left. \begin{aligned} h_1(z) &= \left[A_1 + \frac{\alpha_1/\alpha_2}{3-4\nu} (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 - \lambda A_3) z \right] e^{+\lambda z} + \\ &+ \left[B_1 + \frac{\alpha_1/\alpha_2}{3-4\nu} (\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \lambda B_3) z \right] e^{-\lambda z}; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} h_2(z) &= \left[A_2 + \frac{\alpha_2/\alpha_1}{3-4\nu} (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 - \lambda A_3) z \right] e^{+\lambda z} + \\ &\quad + \left[B_2 + \frac{\alpha_2/\alpha_1}{3-4\nu} (\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \lambda B_3) z \right] e^{-\lambda z}; \\ h_3(z) &= \left[A_3 + \frac{1}{3-4\nu} (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 - \lambda A_3) z \right] e^{+\lambda z} + \\ &\quad + \left[B_3 + \frac{1}{3-4\nu} (\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \lambda B_3) z \right] e^{-\lambda z}. \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

8.2.2. Коэффициент жесткости при толстом среднем слое. Смещения u, v и w в форме синусоиды или косинусоиды с возрастающим удалением в направлении z от поверхности среднего слоя быстро затухают к его середине. Если средний слой достаточно толстый, так что $z \approx h$, т.е. на противоположной поверхности среднего слоя смещения практически равны нулю, то расчет может производиться так же, как и для бесконечно растянутого упругого полупространства. Тогда в уравнениях (8.8) исчезают все компоненты решений с положительным показателем в показательной функции, следовательно; справедливо

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0. \quad (8.9)$$

Оставшиеся три постоянные интегрирования B_1, B_2 и B_3 определяются посредством граничных условий для $z = 0$; на основе жесткого на сдвиг соединения между средним и внешними слоями следует¹:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z=0) &= 0; \quad v(x, y, z=0) = 0; \\ \sigma_z(x, y, z=0) &= 0 = -p_0 \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Из первых двух уравнений (8.10) с учетом уравнений (8.6) следует, что

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0. \quad (8.11)$$

По закону Гука для напряжения σ_z справедливо равенство

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)], \quad (8.12)$$

а для растяжений ϵ_x, ϵ_y и ϵ_z с учетом уравнений (8.6):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 h_1(z) \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_2 h_2(z) \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y; \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = +h_3'(z) \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y. \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

Третье уравнение (8.10) вместе с (8.12) и (8.13) дает следующее выражение:

$$B_3 = \frac{(1+\nu)(3-4\nu)}{2(1-\nu)} \frac{x_0}{\lambda E}. \quad (8.14)$$

¹ Знак "минус" в третьем уравнении (8.10) показывает, что $p_0 > 0$ представляет собой растягивающее напряжение; $\sigma_z > 0$ в качестве нагрузки на единицу площади, действующей в положительном направлении оси x , при $\sigma_z < 0$ возникает напряжение сжатия в сердечнике (см. рис. 41).

С помощью уравнений (8.9), (8.11) и (8.14) определены все постоянные интегрирования, и для нагрузки на единицу площади $p(x, y)$, согласно уравнению (8.2), получаем решения:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \frac{p_0}{\lambda E} (3-4\nu+\lambda z) e^{-\lambda z} \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y; \\ \sigma_z &= -p_0 \left(1 + \frac{\lambda z}{2(1-\nu)}\right) e^{-\lambda z} \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y. \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

На поверхности среднего слоя при $z=0$:

$$\left. \begin{aligned} w(x, y, z=0) &= w_0 \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y; \\ w_0 &= \frac{(1+\nu)(3-4\nu)}{2(1-\nu)} \frac{p_0}{\lambda E}. \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Следовательно, искомый коэффициент жесткости c , согласно уравнениям (8.3), будет следующим:

$$c = \frac{2(1-\nu)}{(1+\nu)(3-4\nu)} \lambda E. \quad (8.17)$$

8.2.3. Коэффициент жесткости при тонком среднем слое. *Граничные условия.* Требуется определить, в каком случае и действительно ли деформации и напряжения в среднем слое толщиной h от поверхности среднего слоя при $z=0$ до противоположной поверхности среднего слоя при $z=h$ практически затухают до нуля. Чем тоньше средний слой по сравнению с внешним слоем, тем меньше это предположение будет соответствовать действительности. Поэтому необходимо также определить коэффициент жесткости c и для тонких средних слоев.

Для решения задачи будем исходить из уравнений (8.8), причем в данном случае части решения с положительным показателем в показательной функции не исключаются. На основе жесткого на сдвиг соединения между средним и внешними слоями необходимо выполнить следующие граничные условия.

На верхней поверхности среднего слоя ($z=0$):

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z=0) &= 0; \quad v(x, y, z=0) = 0; \\ \sigma_z(x, y, z=0) &= -p_0 \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y; \end{aligned} \right\} \quad (8.18a)$$

на нижней поверхности среднего слоя ($z=h$):

$$u(x, y, z=h) = 0; \quad v(x, y, z=h) = 0; \quad (8.18b)$$

третье граничное условие при $z=h$ зависит от вида нагрузки (сжатие или изгиб) и формы смятия (симметричное или асимметричное) (см. рис. 40).

а) Симметричное смятие

Оба внешних слоя сминаются симметрично по фазам: $w(x, y, h) = -w(x, y, 0)$; средняя плоскость среднего слоя $z=h/2$ остается без смещений в направлении z , следовательно, также справедливо выражение

$$w(x, y, z=h/2) = 0. \quad (8.19)$$

б) Асимметричное смятие

Оба внешних слоя сминаются симметрично по фазам, но в одном направлении $w(x, y, h) = w(x, y, 0)$, вследствие асимметрии к средней

плоскости среднего слоя справедливо следующее выражение:

$$\sigma_z(x, y, z=h) = -\sigma_z(x, y, z=0) = p_0 \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y. \quad (8.20)$$

в) Изгибающие напряжения

В данном случае сминается только один, например верхний, внешний слой. Нижний внешний слой, напротив, натягивается под действием растягивающего напряжения и настолько хорошо предотвращает все смещения по направлению z , происходящие от смятия верхнего внешнего слоя, что можно предположить, что

$$w(x, y, z=h) = 0. \quad (8.21)$$

В случае чисто сжимающего напряжения решающее значение всегда имеет асимметричное смятие, так как при нем средний слой деформируется сильнее, чем при симметричном смятии. Поэтому в дальнейшем при расчете достаточно будет ограничиться случаями "б" и "в".

Чисто сжимающее напряжение, асимметричное смятие. Подстановка уравнений (8.6), (8.12) с учетом (8.13) и (8.8) в шесть граничных условий (8.18) и (8.20) дает шесть уравнений для шести неизвестных постоянных интегрирования. С сокращениями

$$\epsilon_1 = \lambda h, \quad \epsilon_2 = \frac{\lambda h}{3-4\nu} \quad (8.22)$$

и при w_0 , согласно (8.16), после длительного расчета получим:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -B_1 = \frac{\epsilon_2 \alpha_1}{\lambda} \frac{1 + \cosh \epsilon_1}{2 \sinh^2 \epsilon_1} w_0; \\ A_2 &= -B_2 = \frac{\epsilon_2 \alpha_2}{\lambda} \frac{1 + \cosh \epsilon_1}{2 \sinh^2 \epsilon_1} w_0; \\ A_3 &= \frac{[1 + (1 + \epsilon_2) e^{-\epsilon_1}] \sinh \epsilon_1 + \epsilon_2 (1 + e^{-\epsilon_1}) \cosh \epsilon_1}{2 \sinh^2 \epsilon_1} w_0; \\ B_3 &= \frac{[1 + (1 - \epsilon_2) e^{\epsilon_1}] \sinh \epsilon_1 + \epsilon_2 (1 + e^{\epsilon_1}) \cosh \epsilon_1}{2 \sinh^2 \epsilon_1} w_0. \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

Подставив уравнения (8.23) в (8.8) и (8.6) для поверхности среднего слоя $z=0$, получим

$$\left. \begin{aligned} w(x, y, z=0) &= w_1 \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y; \\ w_1 &= f_1(\lambda h) w_0; \\ f_1(\lambda h) &= \frac{(\epsilon_2 + \sinh \epsilon_1)(1 + \cosh \epsilon_1)}{\sinh^2 \epsilon_1}. \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

Разложение в степенной ряд $f_1(\lambda h)$ до второго члена дает для небольших значений $\epsilon_1 = \lambda h$

$$f_1(\lambda h) = \frac{8(1-\nu)}{3-4\nu} \frac{1}{\lambda h} \frac{1-2\nu}{3(3-4\nu)} \lambda h. \quad (8.25)$$

Если, например, $\nu = 0$, тогда относительная погрешность уравнения (8.25) по сравнению с (8.24) для $\lambda h \leq \pi$ будет менее 0,75%. Теперь аналогично (8.3) для искомого коэффициента жесткости $c = p_0/w_1$, следовательно,

$$c = \frac{1}{f_1(\lambda h)} \frac{2(1-\nu)}{(1+\nu)(3-4\nu)} \lambda E. \quad (8.26)$$

Чисто изгибающее напряжение. Подстановка уравнений (8.6), (8.12), (8.13) и (8.8) в шесть граничных условий (8.18) и (8.21) дает шесть уравнений для шести неизвестных постоянных интегрирования. С сокращениями (8.22) и w_0 , согласно (8.16), после продолжительного расчета получим:

$$\left. \begin{aligned} A_1 = -B_1 &= -\frac{\varepsilon_2^2 \alpha_1}{\lambda} \frac{1}{2(\varepsilon_2 + \sinh \varepsilon_1 \cosh \varepsilon_1)} w_0; \\ A_2 = -B_2 &= -\frac{\varepsilon_2^2 \alpha_2}{\lambda} \frac{1}{2(\varepsilon_2 + \sinh \varepsilon_1 \cosh \varepsilon_1)} w_0; \\ A_3 &= -\frac{\varepsilon_2(1+\varepsilon_2) + e^{-\varepsilon_2} \sinh \varepsilon_2}{2(\varepsilon_2 + \sinh \varepsilon_1 \cosh \varepsilon_1)} w_0; \\ B_3 &= +\frac{\varepsilon_2(1-\varepsilon_2) + e^{\varepsilon_2} \sinh \varepsilon_2}{2(\varepsilon_2 + \sinh \varepsilon_1 \cosh \varepsilon_1)} w_0. \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

Подставив уравнения (8.27) в (8.8) и (8.6) для поверхности среднего слоя $z = 0$, получим:

$$\left. \begin{aligned} w(x, y, z=0) &= w_2 \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y; \\ w_2 &= f_2(\lambda h) w_0; \\ f_2(\lambda h) &= \frac{\sinh^2 \varepsilon_1 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_2 + \sinh \varepsilon_1 \cosh \varepsilon_1}. \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

Разложение в степенной ряд $f_2(\lambda h)$ до второго члена для небольших значений дает

$$f_2(\lambda h) = \frac{2(1-2\lambda)}{3-4\nu} \lambda h - \frac{1-4\nu}{12(1-\nu)} (\pi h)^2. \quad (8.29)$$

Если, например, $\nu = 0$, тогда относительная погрешность уравнения (8.29) по сравнению с (8.28) для $\lambda h \leq 1$ составит менее 1,4%. Теперь аналогично (8.3) для искомого коэффициента жесткости c получим $c = p_0/w_2$, следовательно,

$$c = \frac{1}{f_2(\lambda h)} \frac{2(1-\nu)}{(1+\nu)(3-4\nu)} \lambda E. \quad (8.30)$$

Сжатие и изгиб. Если σ_u и σ_o обозначают нормальные напряжения в нижних и соответственно верхних внешних слоях, то для отношения обоих напряжений справедливо следующее:

при чистом сжатии, т.е. $\sigma_o = \sigma_u$, $\psi = \sigma_u/\sigma_o = 1$;

при чистом изгибе, т.е. $\sigma_o = -\sigma_u$, $\psi = \sigma_u/\sigma_o = -1$;

при одновременной работе многослойной панели на сжатие и изгиб, предполагая попожительный изгибающий момент¹, $-1 < \psi = \sigma_u/\sigma_o < 1$. Коэффициенты жесткости c для двух предельных случаев $\psi = -1$ и

¹ Сжимающее напряжение при изгибе возникает в верхнем внешнем слое и складывается со сжимающим напряжением нормальной силы, в то время как в нижнем внешнем слое возникает напряжение растяжения при изгибе и снижает сжимающие напряжения от нормальной силы.

$\psi = -1$ определены уравнениями (8.26) и (8.30) и обозначаются: c_1 для $\psi = 1$ и c_2 для $\psi = -1$. Когда $-1 < \psi < 1$, точное определение c сложно, поэтому его можно приблизительно определить пинейной интерполяцией между c_1 и c_2 . Тогда получим

$$c = \frac{1+\psi}{2} c_1 + \frac{1-\psi}{2} c_2$$

или при

$$\frac{1}{f_3(\lambda h)} = \frac{1+\psi}{2f_1(\lambda h)} + \frac{1-\psi}{2f_2(\lambda h)} \quad (8.31)$$

с учетом уравнений (8.26) и (8.30) получим

$$c \frac{1}{f_3(\lambda h)} \frac{2(1-\nu)}{(1+\nu)(3-4\nu)} \lambda E. \quad (8.32)$$

Заключение. Коэффициент жесткости среднего слоя с многослойной панели может быть выражен в форме:

$$c = K \frac{\lambda}{f(\lambda h)}; \quad K = \frac{2(1-\nu)E}{(1+\nu)(3-4\nu)}, \quad (8.33)$$

причем в зависимости от толщины среднего слоя и вида нагрузки $f(\lambda h)$ может быть равно 1, $f_1(\lambda h)$, $f_2(\lambda h)$ и $f_3(\lambda h)$. При изотропном материале среднего слоя между E , G и ν возникает соотношение $E = 2(1+\nu)G$, так что в K , согласно (8.33), вместо E можно записать

$$E = \sqrt{E^2} = \sqrt{2(1+\nu)GE}; \quad (8.34)$$

тогда

$$c = K \frac{\lambda}{f(\lambda h)}; \quad K = \frac{2(1-\nu)}{3-4\nu} \sqrt{\frac{2GE}{1+\nu}}. \quad (8.35)$$

При анизотропном материале среднего слоя невыполнимы ни отношения (8.33) — (8.35), ни основные уравнения смещений (8.4), из которых определяется c . Но если (как в случае пенополиуретана) анизотропность не слишком выражена, то эти отношения могут быть использованы по крайней мере в качестве приближенных расчетов (см. примеч. к п. 8.1.2). При этом целесообразно определять K согласно уравнениям (8.35) вместо (8.33), так как первые содержат оба модуля E и G , выражающие деформации этого слоя в результате его смещения. Уравнения (8.33) содержат только модуль E .

В заключение дадим также численную оценку и сопоставление отношений $f_1(\lambda h)$ и $f_2(\lambda h)$ согласно уравнениям (8.24) и (8.28) для различных значений λh и коэффициентов поперечного сжатия ν , равных 0, 0,25 и 0,5. Эти значения представлены в табл. 8.1, согласно которой для больших значений λh $f_1(\lambda h) \rightarrow 1$ и $f_2(\lambda h) \rightarrow 1$, т.е. они переходят в решение для многослойных панелей с толстым средним слоем (см. п. 8.2.2). Напротив, для $\lambda h \rightarrow 0$ выражения $f_1(\lambda h) \rightarrow \infty$ и $f_2(\lambda h) \rightarrow 0$, т.е. при асимметричном смятии под действием напряжения сжатия многослойной панели средний слой тем меньше придает жесткость внешним слоям, чем он тоньше. И наоборот, при изгибе многослойной панели влияние жесткости внешнего слоя, в котором действует растягивающее напряжение, сказывается на внешнем слое, работающем на сжатие, тем больше, чем тоньше средний слой. Оба результата являются убедительными.

Таблица 8.1. Значения $f_1(\lambda h)$ и $f_2(\lambda h)$ в зависимости от λh и ν

	$f_1(\lambda h)$			$f_2(\lambda h)$		
	$\nu = 0$	$\nu = 0,25$	$\nu = 0,5$	$\nu = 0$	$\nu = 0,25$	$\nu = 0,5$
0	∞	∞	∞	0	0	0
0,2	13,356	15,017	20	0,1327	0,1	0,001323
0,4	6,711	7,533	10	0,2614	0,1999	0,01033
0,6	4,511	5,05	6,668	0,3826	0,299	0,03346
0,8	3,422	3,817	5,003	0,4934	0,396	0,07482
1	2,778	3,086	4,005	0,5916	0,4889	0,13545
1,2	2,355	2,602	3,342	0,6762	0,5756	0,2132
1,4	2,06	2,263	2,871	0,7471	0,654	0,3032
1,6	1,844	2,013	2,52	0,8051	0,7227	0,3992
1,8	1,681	1,823	2,25	0,8515	0,7813	0,495
2	1,554	1,675	2,037	0,8881	0,8299	0,5851
2,2	1,455	1,558	1,858	0,9163	0,8693	0,666
2,4	1,375	1,463	1,726	0,9379	0,9007	0,7358
2,6	1,311	1,386	1,611	0,9542	0,9252	0,7943
2,8	1,258	1,323	1,516	0,9664	0,9441	0,8418
3	1,215	1,27	1,436	0,9756	0,9585	0,8797
3,5	1,137	1,175	1,287	0,989	0,9807	0,9415
4	1,088	1,113	1,189	0,9952	0,9913	0,9726
5	1,036	1,048	1,082	0,9991	0,9983	0,9945
∞	1	1	1	1	1	1

8.3. СМЯТИЕ ВНЕШНИХ СЛОЕВ

8.3.1. Общее решение. Если из плоской многослойной панели выделить внешний слой, испытывающий действие нагрузок p_x , p_y и p_{xy} , то для него справедливо дифференциальное уравнение (5.37), поскольку в нем:

жесткость многослойной конструкции B_s заменяется собственной жесткостью B_D внешних слоев, так как рассматриваться должно только смятие внешних слоев;

γ_{xx} и γ_{yz} приравнивается к нулю, так как внешний слой неподвижен на сдвиг;

p заменяется отпорным давлением $p = -c\omega$, где, согласно (8.33), $c = K\lambda/f(\lambda h)$.

Таким образом, с помощью уравнений (7.42) получим

$$\Delta \Delta \omega + \frac{P_x}{B_D} \omega'' + \frac{P_{xy}}{B_D} \omega'' + \frac{P_y}{B_D} \omega'' + \frac{c}{B_D} \omega = 0. \quad (8.36)$$

В дальнейшем предполагается касательная сила $P_{xy} = 0$. Теперь в уравнение (8.36) подставим третье отношение (8.6) для $z = 0$, т.е. при $h(0) = \omega$, $\alpha_1 = \pi/a_x$ и $\alpha_2 = \pi/a_y$, согласно (8.7), получим выражение

$$\omega = \omega_0 \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y, \quad (8.37)$$

которое обеспечивает совместность перемещений ω внешнего слоя и поверхности среднего слоя. После приравнивания коэффициентов в $\omega_0 \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y$ получим

$$\alpha_1^2 P_x + \alpha_2^2 P_y = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) B_D + C,$$

откуда при z согласно (7.53) и λ согласно (8.7) сразу следует

$$P_x = \frac{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) B_D + C}{\alpha_1^2 + z \alpha_2^2} = \frac{\lambda^4 B_D + C}{\lambda^2 - (1-z) \alpha_2^2}. \quad (8.38)$$

Подстановкой c согласно (8.35) и введением безразмерных сокращений:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\lambda l}{\pi} \sqrt{\left(\frac{l}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{l}{a_y}\right)^2}; \quad v = \frac{\alpha_2 l}{\pi} = \frac{l}{a_y}; \\ \varphi &= (1-z) v^2; \quad \epsilon_3 = \pi \frac{h}{l}; \quad \chi = \frac{K l^3}{2 \pi^3 B_D} \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

уравнение (8.38) переходит в

$$P_x = c_x \frac{B_D}{l^2}, \quad c_x = \pi^2 \frac{u^4 + 2 \chi u / f(\epsilon_3 u)}{u^2 - \varphi}. \quad (8.40)$$

Величина l в уравнениях (8.9) и (8.40) является произвольной относительной длиной, которая устанавливается в зависимости от конкретного случая. При P_x , согласно (8.40), получаем напряжение во внешнем слое $\sigma_x = P_x / t$.

c_x , согласно (8.40), является собственным значением критической нагрузки, вызывающей смятие P_x ; оно неявно зависит через u и φ от еще неизвестных длин волн смятия a_x и a_y . Чтобы получить наименьшую критическую нагрузку, вызывающую смятие, c_x необходимо минимизировать по u и φ ; в дальнейшем эта нагрузка будет обозначаться P_{xk} , а соответствующее напряжение, вызывающее смятие, $\sigma_{xk} = P_{xk} / t$. Рассмотрим наиболее важные случаи.

8.3.2. Нагрузка и напряжения, вызывающие смятие в случае толстого среднего слоя. Многослойная панель, протяженная по осям x и y . При толстом среднем слое $f_2(\epsilon_2, u) = 1$, как видно из п. 8.2, c_x упрощается в

$$c_x = \pi^2 \frac{u^4 + 2 \chi u}{u^2 - \varphi}. \quad (8.41)$$

а) $z < 1$, т.е. $P_y < P_x$.

Если реевые усиления P_x и P_y при постоянном соотношении нагрузки $z = P_y / P_x$ увеличиваются вплоть до границы устойчивости, то смятие внешнего слоя возникает только по оси x , так как P_y недостаточна для возникновения волн смятия по оси y . Следовательно, $a_y = \infty$, а тем самым, согласно (8.39), $v = 0$ и $\varphi = 0$. Наименьшее значение c_x , согласно (8.41), получается из $dc_x / du = 0$ и имеет вид

$$u = \sqrt[3]{\chi}, \quad c_x = 3 \pi^2 \sqrt[3]{\chi^2}. \quad (8.42)$$

С учетом уравнений (8.39) из (8.42) непосредственно получим:

$$\alpha_x = \pi \sqrt{\frac{2 B_D}{K}}; \quad P_{xk} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2 K^2 B_D}; \quad \sigma_{xk} = \frac{P_{xk}}{F_{\square}}. \quad (8.43)$$

Если $z = -1$, т.е. $P_y = -P_x$ и соответственно $\sigma_y = -\sigma_x$, тогда во фрагменте

внешнего слоя, повернутого на 45° против системы x, y имеет место состояние чистого касательного напряжения с $\tau = \sigma_x$. Касательные напряжения при смятии τ_k внешнего слоя, работающего на сдвиг при бесконечно растянутой многослойной панели, составляют, следовательно,

$$\tau_k = \sigma_{kk} = P_{kk} / F_D \quad (8.44)$$

при P_{kk} согласно (8.43).

б) $z = 1$, т.е. $P_y = P_x$.

Если осевые сжимающие усилия $P_x = P_y$ увеличиваются до границы устойчивости, то граница смятия внешнего слоя достигается одновременно по осям x и y . Из уравнений (8.39) вследствие $z = 1$ получаем $\varphi = 0$, так что минимизирование уравнения (8.41) повторно даёт уравнения (8.42). С учетом (8.39) и (8.40) выражения (8.42) непосредственно дают:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1/\alpha_x^2 + 1/\alpha_y^2}} &= \pi \sqrt[3]{\frac{2B_D}{K}}; \\ P_{kk} &= \frac{3}{2} \sqrt{2K^2 B_D}; \quad \sigma_{kk} = \frac{P_{kk}}{F_D}. \end{aligned} \right\} \quad (8.45)$$

Следовательно, для нагрузки, вызывающей смятие P_{kk} , получается то же самое выражение, что и в уравнениях (8.43). Для длин волн смятия α_x и α_y однозначных значений нет; существует лишь отношение, которое связывает одно с другим α_x и α_y . Например, предельный случай $\alpha_y \rightarrow \infty$ даёт значение α_x согласно (8.43), а предельный случай $\alpha_x \rightarrow \infty$ — значение α_y той же величины, как и α_x согласно (8.43). α_x и α_y выполняют неравенство

$$\pi \sqrt[3]{\frac{2B_D}{K}} \leq \left\{ \frac{\alpha_x}{\alpha_y} \right\} \leq \infty. \quad (8.46)$$

Если произвольно выбрать одно из двух значений α_x и α_y в пределах границ (8.46), то из первого отношения (8.45) получится соответственно другое. Оно также находится в пределах границ выражения (8.46).

в) $z > 1$, т.е. $P_y > P_x$.

В этом случае граница смятия сначала достигается по направлению y . Для целесообразности система координат переименовывается таким образом, что направления x и y меняются местами. Тогда P_y переходит в P_x , а P_x в P_y ; $P_x > P_y$, следовательно, $z = P_y/P_x < 1$. Таким образом, рассмотрение данного случая можно произвести с позиций пункта "а".

Отношения (8.43) и (8.45) справедливы, согласно сделанным предположениям, только в случае плоских внешних слоев, так что туда необходимо добавить:

$$\left. \begin{aligned} F_D &= t; \quad B_D = \frac{E_D t^3}{12(1-\nu_D^2)}; \\ K &= \frac{2(1-\nu_K)}{3-4\nu_K} \sqrt{\frac{2G_K E_K}{1+\nu_K}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.47)$$

Они могут быть также использованы для гофрированных (т.е. слегка профилированных) внешних слоев с характеристиками поперечного сечения F_D и $B_D = E_D J_D$, так как они ведут себя так же, как и плоские внешние слои. В случае плоских внешних слоев отношения (8.43) могут

быть записаны в форме:

$$\alpha_x = \mu t \sqrt[6]{\frac{E_D^2}{G_K E_K}}; \quad \sigma_{xk} = \varkappa \sqrt[3]{G_K F_K E_D}, \quad (8.48)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{\pi}{2} \sqrt[6]{\frac{2(1+\nu_K)(3-4\nu_K)^2}{9(1-\nu_K)^2(1-\nu_D^2)^2}}; \\ \varkappa &= \sqrt[3]{\frac{9(1-\nu_K)^2}{2(1+\nu_K)(3-4\nu_K)^2(1-\nu_D^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (8.49)$$

σ_{xk} , согласно (8.48), справедливо до тех пор, пока σ_{xk} еще находится в упругой стадии работы материала внешних слоев. При нарушении такого условия σ_{xk} необходимо сократить. Численное определение выражений (8.49) для $\nu_D = 0,3$ (например, сталь), а также некоторые значения ν_K представлены в табл. 8.2. Согласно данной таблице, в зоне

Таблица 8.2. Коэффициенты μ и $\varkappa$ для $\nu_D = 0,3$ и некоторых значения ν_K

ν_K	μ	$\varkappa$
0	1,819	0,819
0,1	1,826	0,814
0,2	1,822	0,817
0,3	1,806	0,838
0,4	1,77	0,965
0,5	1,701	0,938

$0 \leq \nu_K \leq 0,3$, которая является определяющей для синтетических пеноматериалов, μ и $\varkappa$ едва изменяются. Поэтому вместо выражений (8.48) расчет можно производить с помощью упрощенного выражения

$$\alpha_x = 1,82t \sqrt[6]{\frac{E_D^2}{G_K E_K}}; \quad \sigma_{xk} = 0,82 \sqrt[3]{G_K E_K E_D}. \quad (8.50)$$

Пример. Для многослойной балки с внешними слоями из стали ($E_D = 2100000$ кгс/см², $t = 0,5$ мм) и сердечником из пенополиуретана объемной массой 50 кгс/м³ ($G_K = 30$ кгс/см², $E_K = 70$ кгс/см²) уравнения (8.50) дают длину волны смятия $\alpha_x = 3,26$ см и напряжение, вызывающее смятие $\sigma_{xk} = 1345$ кгс/см².

Многослойная панель, протяженная по оси x и ограниченная по оси y . Представляют интерес два граничных условия по краям $y = \text{const}$ многослойной панели (рис. 42).

Внешние слои, свободно сдвигаемые по оси z по обоим краям $y = \text{const}$.

Этот случай имеет место при плоских многослойных балках, расположенных в направлении x без повышения жесткости краев, у которых $P_y = 0$, а тем самым и $z = 0$. Волны смятия по оси y не образуются, следовательно, $\alpha_y = \infty$. Расчет α_x и P_{xk} соответственно σ_{xk} может, следовательно, осуществляться, как и в п. 8.3.2 [ср. (8.48) и (8.50)].

Внешние слои, не сдвигаемые по оси z по обоим краям $y = \text{const}$.
Данный случай имеет место:

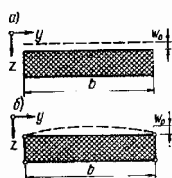


Рис. 42. Граничные условия для внешних слоев по краям $y = \text{const}$
 а — внешние слои у края панели свободно сдвигаются $a_y = \infty$; б — внешние слои у края панели крепятся шарнирно и неподвижно $a_y = b$

при плоских многослойных балках, расположенных в направлении x с шарнирно присоединенным усилением краев или

при горизонтальных участках (BC) и наклонных участках (AB, CD) трапециевидальных многослойных балок, на которые действует поперечная нагрузка (рис. 43), чьи точки перегиба для внешних слоев действуют как несдвигаемые пинейные опоры, которые приближенно могут быть приняты как шарнирные линии. При этом в большинстве случаев $P_y = 0$, но возможно и $P_y \neq 0$, а тем самым и $z \neq 0$. Для наглядности в дальнейшем z ограничивается на значения $z \leq 1^*$, так что для φ , согласно (8.39), имеет место $\varphi \geq 0$.

Минимизирование c_x , согласно (8.41), относительно φ можно легко пропустить. Длина волны смятия a_y по оси y с учетом граничных условий внешних слоев составляет дробь j общей ширины b :

$$a_y = \frac{b}{j}; \quad \varphi = j^2(1-z)\left(\frac{l}{b}\right)^2. \quad (8.51)$$

c_x , согласно (8.41), будет тем меньше, чем больше знаменатель уравнения (8.41). Так как предполагается, что $\varphi \geq 0$, то, следовательно, φ , согласно (8.51), должно стать как можно меньше. Наименьшее значение φ при заданном значении $z < 1$ получается при $j = 1$, т.е. когда внешний слой сминается одной единственной волной по всей ширине b^{**} . Если в качестве относительной длины l выбрать ширину панели b , то из уравнений (8.51) и (8.39) следует:

$$a_y = b; \quad \varphi = 1 - z; \quad \chi = \frac{Kb^3}{2\pi^3 B_D}. \quad (8.52)$$

Минимизирование c_x , согласно (8.41), относительно u дает с помощью отношения $dc_x/du = 0$ уравнение пятой степени

$$u^3(u^2 - 2\varphi) = \chi(u^2 + \varphi). \quad (8.53)$$

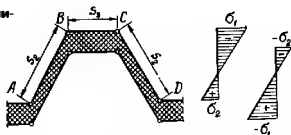
Определив из него основное, вещественное, положительное решение u , с помощью уравнений (8.39) — (8.41) получим α_x , P_{xk} и δ_{xk} :

$$\alpha_x = \frac{b}{\sqrt{u^2 - 1}}; \quad P_{xk} = \frac{\pi^2 u^4 + 2\chi u}{u^2 - \varphi} \frac{B_D}{b^2}; \quad \delta_{xk} = \frac{P_{xk}}{F_D}. \quad (8.54)$$

* P_y в качестве сжимающей силы меньше или равно P_x , а в качестве растягивающей усилия — произвольное.

** При $z > 1$ должно быть как можно больше, но меньше или равно u . Тем самым из первого отношения (8.39) получается еще действительное значение $\alpha_x \leq \infty$. Следовательно, может возникнуть многоволновое смятие по ширине.

Рис. 43. Поперечный разрез трапеци-
дальной многослойной балки



Уравнения (8.54) справедливы до тех пор, пока уравнение (8.53) дает решение $u \geq 1$, в противном случае из уравнений (8.54) не получается вещественного α_x . $u \geq 1$ имеет место, пока

$$\chi \geq \chi_0 = \frac{1-2\varphi}{1+\varphi}. \quad (8.55)$$

Предельный случай $u = 1$ дает $\alpha_x = \infty$. Если, напротив, $\chi < \chi_0$, так что уравнение (8.54) не будет справедливо, то получается наименьшее значение c_x , согласно (8.41), при дополнительном условии вещественного значения α_x для $u = 1$, тогда при $1 - \varphi = z$ получим:

$$\alpha_x = \infty; \quad P_{xk} = \pi^2 \frac{1+2\chi}{z} \frac{B_D}{b^2}; \quad \sigma_{xk} = \frac{P_{xk}}{F_D}. \quad (8.56)$$

Уравнения (8.54) и (8.56) справедливы только до тех пор, пока σ_{xk} еще изменяется в линейной зависимости от внешнего усилия.

Особый случай: пусть $\chi = 0$ (бесконечно мягкий средний слой), а $\varphi = 1$ (одноосное сжатие). Уравнение (8.53) дает $u = \sqrt{2}$, тогда уравнение (8.54) дает $\alpha_x = b D_{xk} = 4\pi^2 B_D / b^2$. Этот результат совпадает с (7.49) для $r = 0$.

Решение уравнения (8.53), согласно u , и расчет α_x и $P_{xk} = c_x B_D / l^2$, согласно (8.54) и (8.56), были осуществлены для различных численных значений χ и φ . Результаты собраны в табл. 8.3.

Таблица 8.3. Значения u , α_x/b , c_x/π^2 для различных параметров φ и χ при толстом среднем слое

	$\varphi = 0 (z = 1)$			$\varphi = 1 (z = 0)$			$\varphi = 2 (z = -1)$		
	u	α_x/b	c_x/π^2	u	α_x/b	c_x/π^2	u	α_x/b	c_x/π^2
0	1	∞	1	1,414	1	4	2	0,577	8
0,1	1	∞	1,2	1,45	0,953	4,273	2,018	0,57	8,197
0,2	1	∞	1,4	1,482	0,914	4,528	2,036	0,564	8,389
0,5	1	∞	2	1,565	0,831	5,219	2,086	0,548	8,94
1	1	∞	3	1,676	0,744	6,215	2,159	0,523	9,787
2	1,26	1,305	4,762	1,845	0,645	7,89	2,283	0,487	11,3
3	1,442	0,962	6,24	1,977	0,567	9,331	2,387	0,481	12,65
5	1,71	0,721	6,772	2,184	0,515	11,83	2,559	0,425	15,05
10	2,154	0,524	13,93	2,553	0,426	16,95	2,882	0,37	20,08
20	2,714	0,396	22,1	3,046	0,348	25,12	3,33	0,315	28,18
50	3,684	0,282	40,72	3,939	0,263	43,72	4,188	0,247	48,75
100	4,642	0,221	64,63	4,848	0,211	67,84	5,04	0,202	70,65

Пример. Дана горизонтальная часть волны многослойной трапецидальной балки с $b = 8$ см, $t = 1$ мм, $z = 0$, $\nu_D = 0,3$, $\nu_K = 0$, $E_D = 2 \cdot 10^6$ кгс/см², $E_K = 80$ кгс/см², $G_K = 40$ кгс/см², $\sigma_p = 2880$ кгс/см (сталь Ст 52).

Получим: $B_D = 192,3 \text{ кг/см}$, $K = 53,33 \text{ кгс/см}^2$, $\chi = 2,29$, $\varphi = 1,1$, $u = 1,886$, $c_x = 8,326\pi^2$, $\alpha_x = 5 \text{ см}$, $P_{xk} = 246 \text{ кг/см}$, $\delta_{xk} = 2469 \text{ кгс/см}^2$. δ_{xk} находится ниже границы пропорциональности δ_D диаграммы σ, ϵ . Выражения (8.48) с учетом (8.49) для $v_k = 0$ дают $\alpha_x = 6,07 \text{ см}$, а $\delta_{xk} = 1545 \text{ кгс/см}^2$. Стабилизирующее действие несмещаемых краев $y = \text{const}$ повышает, следовательно, напряжение смятия δ_{xk} относительно значения 1545 кгс/см^2 на 60%.

8.3.3. Негрузка и напряжения, вызывающие смятие при тонком среднем слое. Рассмотрим случай, когда $\varphi = 0$, т.е. согласно п. 8.3.2. Это: сильно протяженная по осям x и y многослойная панель под действием двухосной нагрузки нормальной силы (P_x и P_y) или плоская многослойная балка, проходящая в направлении x без усиления краев при $P_y = 0$.

Случай, когда $\varphi \neq 0$ можно рассматривать аналогично случаю, когда $\varphi = 0$. Если в качестве относительной длины l выбрать толщину h среднего слоя, то из уравнений (8.39) и (8.40) следует:

$$u = \frac{b}{\alpha_x}; \quad \epsilon_s = \pi; \quad \chi = \frac{Kh^3}{2\pi^3 B_D}, \quad (8.57)$$

а также

$$P_x = c_x \frac{B_D}{z^2}; \quad c_x = \pi^2 \left(u^2 + \frac{2\chi}{uf(\pi u)} \right). \quad (8.58)$$

Минимизирование c_x , согласно (8.59), относительно u дает с помощью отношения $dc_x/du = 0$ отношение

$$u^3 f^2 - \chi(f + \pi u f') = 0^*. \quad (8.59)$$

Если сюда подставить $f(\pi u)$, согласно (8.24) или (8.28), или (8.31), то получим соответственно трансцендентное уравнение для u , которое необходимо решать только последовательным приближением. Подстановкой в (8.58) полученного решения u получаем минимальное значение c_x . Особый случай, когда $f(\pi u) = 1$, непосредственно дает уже известные выражения (8.42), справедливые для толстого среднего слоя. Численное определение отношений (8.59) и (8.58) для $v_k = 0$ и различные значения χ , а также сопоставление с отношениями (8.42) дано в табл. 8.4. После определения u и c_x при заданном значении χ можно рассчитывать по формулам:

$$\alpha_x = \frac{h}{u}; \quad P_{xk} = c_x \frac{B_D}{h^2}; \quad \delta_{xk} = \frac{P_{xk}}{F_D} \quad (8.60)$$

длину воли смятия, предельную нагрузку и напряжения, вызывающие смятие.

В случае чистой сжимающей нагрузки для $\chi < 1$ значение u приближенно будет равно нулю, а $f_1(\pi u)$ — очень большая величина. Если для $f_1(\pi u)$ использовать приближение (8.25), то при $\Delta h = \pi u$ и $\varphi = 0$ из (8.58) следует, что

$$c_x = \pi^2 \frac{\pi(3-4v_k)}{4(1-v_k)} \chi. \quad (8.61)$$

* f' означает в данном случае производную от f по полному аргументу $\epsilon_s = \pi u$.

Таблица 8.4. Значения χ , μ и c_x/π^2 при $\nu_K = 0$ для тонкого среднего слоя

χ	Толстый средний слой		Тонкий средний слой					
	$f(\pi\mu) = 1$		чистое сжатие: $f(\pi\mu) = f_1(\pi\mu)$			чистый изгиб: $f(\pi\mu) = f_2(\pi\mu)$		
	μ	c_x/π^2	μ	c_x/π^2	отклонение, %	μ	c_x/π^2	отклонение, %
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,01	0,215	0,1392	0	0,0236	-83,0	0,313	0,2074	+49,0
0,02	0,271	0,2210	0	0,0471	-78,7	0,372	0,3004	+35,9
0,05	0,368	0,4072	0	0,1178	-71,1	0,468	0,4969	+22,1
0,1	0,464	0,6484	0	0,2356	-63,5	0,557	0,7372	+14,1
0,2	0,585	1,028	0	0,4712	-54,1	0,666	1,109	+8,1
0,5	0,794	1,890	0	1,178	-37,7	0,85	1,949	+3,1
1	1	3	0,001	2,356	-21,5	1,034	3,036	+1,2
1,1	1,032	3,197	0,279	2,589	-19	1,063	3,229	+1
1,5	1,145	3,931	0,689	3,435	-12,6	1,167	3,954	+0,6
2	1,26	4,762	0,936	4,359	-8,5	1,275	4,778	+0,3
3	1,442	8,241	1,239	5,950	-4,7	1,45	6,248	+0,1
5	1,710	8,772	1,599	8,596	-2,0	1,713	8,775	+0,0
10	2,154	13,924	2,112	13,851	-0,5	2,155	13,925	+0,0
20	2,714	22,104	2,703	22,061	-0,1	2,714	22,105	+0,0

Представленные в табл. 8.4 значения c_x для $\chi < 1$ при сжимающей нагрузке были рассчитаны согласно (8.61) вместо (8.58).

В шестой и девятой графах табл. 8.4 даны процентные отклонения значений напряжений, вызывающих смятие, в случае тонкого среднего слоя от подобных же значений в случае толстого среднего слоя. Они зависят от χ согласно (8.57) и от вида нагрузки (сжатие или изгиб). Отсюда определяется, когда средний слой можно считать толстым, а когда — тонким. Если, например, требуется, чтобы процентная погрешность для напряжения, вызывающего смятие, при расчете с толстым средним слоем могла максимально составлять 5%, то для $\nu_K = 0$ получается табл. 8.5.

Таблица 8.5. Определение толщины среднего слоя

Нагрузка	Средний слой	
	толстый	тонкий
Чистое сжатие	$\chi \geq 2,9$	$\chi < 2,9$
Чистый изгиб	$\chi \geq 0,32$	$\chi < 0,32$

Пример. Имеется многослойная трапецевидного сечения балка при $t = 1$ мм, $\nu_D = 0,3$, $\nu_K = 0$, $E_D = 2\,100\,000$ кгс/см², $E_K = 80$ кгс/см², $G_K = 40$ кгс/см², $h = 30$ мм, $\sigma_D = 1920$ кгс/см² (сталь St 37) под действием: а) чистого напряжения при изгибе. Получим $B_D = 192,3$ кгс/см, $K = 53,33$ кгс/см², $\chi = 0,1207$, т.е. тонкий средний слой согласно табл. 8.5:

а) при чистом напряжении сжатия:

$$\mu = 0,$$

$$c_x = 0,2844\pi^2,$$

$$\sigma_K = 600 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\alpha_x = \infty,$$

$$R_K = 60 \text{ кгс/см},$$

б) при чистом напряжении изгиба:

$$\begin{aligned} u &= 0,585, & \alpha_x &= 5,13 \text{ см}, \\ c_x &= 0,8225 \pi^2, & P_{xk} &= 173,4 \text{ кгс/см}. \end{aligned}$$

$\sigma_{xk} = 1734 \text{ кгс/см}^2$. В обоих случаях σ_{xk} находится ниже границы пропорциональности σ_p диаграмм σ, ϵ . При толстом среднем слое уравнения (8.48) с учетом (8.49) для $v_k = 0$ дают $\alpha_x = 6,07 \text{ см}$ и $\sigma_{xk} = 1545 \text{ кгс/см}^2$. Следовательно, влияние наибольшей толщины среднего слоя уменьшает или соответственно повышает напряжение, вызывающее смятие σ_{xk} относительно значения 1545 кгс/см^2 на 61% или соответственно на 12%.

8.4. ДОПОЛНЕНИЯ

8.4.1. Смятие внешних слоев при линейно-переменном по оси y сжимающем напряжении. *Приближенное решение.* Необходимо рассмотреть многослойную панель с несминающимися краями $y = \text{const}$, сильно протяженную в направлении x и ограниченную в направлении y (см. рис. 42,б). В п. 8.3 была допущена предпосылка, что сжимающее напряжение $\sigma_x = P_x/t$ в направлении y является постоянным по всей ширине b . Теперь надо рассмотреть случай линейно-переменного по y напряжения

$$\sigma_x(y) = \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{f} y, \quad (8.62)$$

причем $\sigma_x(0) = \sigma_1$ — сжимающее напряжение ($\sigma_1 < 0$), а $\sigma(b) = \sigma_2 = \psi \sigma_1$ для $\psi > 0$ также сжимающее напряжение, но для $\psi < 0$ является растягивающим напряжением. ψ должно быть меньше или равно 1, так что σ_1 является самым большим сжимающим напряжением в пролете панели. Точный расчет критической нагрузки σ_{xk} внешнего слоя чрезвычайно сложен, так как

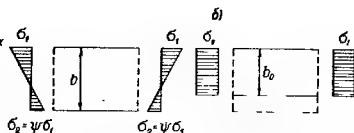
коэффициент жесткости s среднего слоя не может больше рассчитываться таким простым способом, как в п. 8.2;

вследствие $\sigma_x = \sigma_x(y)$ коэффициент w'' в дифференциальном уравнении (8.36) не является больше постоянным. Поэтому в данном случае дается только приближенное решение.

Ширина b заданного пролета панели I с линейно убывающим от σ_1 к σ_2 сжимающим напряжением пересчитывается, таким образом, в ширину b_0 пролета панели II, взятого в качестве замены (рис. 44), чтобы оба панельных пролета имели одинаковое напряжение смятия σ_{xk} . При таком пересчете предполагается, что соотношение b_0/b в зонах выпучивания слоев с упругим подстилающим слоем через средний слой то же самое, что и в случае зон выпучивания без упругого подкрепления. Такое предположение очевидно, поскольку эпюры выпучивания в обоих случаях похожи одна на другую: одна волна выпучивания от края к краю в направлении y и много волн в направлении x . Единственное отличие: в случае с подкреплением длина волн выпучивания в направлении x меньше, чем в случае без подкрепления, а поэтому напряжение смятия σ_{xk} больше, чем напряжение при выпучивании σ_{xb} обычной панели.

Определение отношения b_0/b для зон выпучивания без упругого подкрепления не представляет трудностей в противоположность зонам выпучивания с упругим подкреплением. Соответственно этому напря-

Рис. 44. Заданный (а) и замененный (б) пролеты панели при линейном переменном сжимающем напряжении



жение при выпучивании σ_{ik} составляет на верхнем крае панели ($y=0$) для зоны выпучивания I: $\sigma_{ikI} = c_{kI} B_D / b^2 t$; } (8.63)
 для зоны выпучивания II: $\sigma_{ikII} = c_{kII} B_D / b^2 t$ }
 при c_{kI} согласно табл. 8.6 и $c_{kII} = 4$. Приравняв σ_{ikI} и σ_{ikII} , получаем

$$\frac{b_0}{b} = \sqrt{\frac{c_{kII}}{c_{kI}}} \quad (8.64)$$

Таблица 8.6. Коэффициенты выпучивания c_{kI} и соотношения ширины зоны выпучивания b_0/b для некоторых значений ψ

ψ	c_{kI} / π^2	b_0/b	ψ	c_{kI} / π^2	b_0/b
1	4	1,000	0,6	15,13	0,514
0,8	4,44	0,949	-0,8	19,23	0,456
0,6	4,99	0,895	-1	23,88	0,409
0,4	5,59	0,838	-1,2	28,94	0,372
0,2	6,59	0,779	-1,4	34,43	0,341
0	7,81	0,716	-1,6	40,41	0,315
-0,2	9,49	0,649	-1,8	46,87	0,292
-0,4	11,86	0,561	-2	53,80	0,273

Определение численных значений уравнения (8.64) для различных значений $\psi = \sigma_2 / \sigma_1$ дано в табл. 8.6.

Применение данных положений к многослойным складчатым конструкциям. Складчатые конструкции состоят из плоских по зонам поверхностей. Примером многослойной складчатой конструкции является изображенный на рис. 43 трапециевидный "сэндвич". При поперечном изгибе складчатообразных многослойных балок во внешних слоях многослойной конструкции возникают (в зависимости от наклона отдельных плоскостей складки) постоянные или линейно-переменные по ширине пролета, нормальные напряжения σ_x . Например, в трапециевидном "сандаиче", согласно рис. 43, действуют:

в горизонтальном участке BC верхнего трапециевидного профиля — постоянное сжимающее напряжение σ_1 ;

в обеих стенках трапеции AB и CD верхнего трапециевидного профиля по ширине стенки AB и соответственно CD — нормальное напряжение, линейно возрастающее от σ_1 к σ_2 . Величина этих нормальных напряжений определяется по теории изгиба для многослойных балок. Она зависит от поперечной нагрузки, и, следовательно, необходимо проверить, не имеет ли она уже своим следствием смятие внешних слоев.

При определении напряжения, вызывающего смятие, можно предполагать, что ребра, идущие вдоль мест смятия складчатой конструкции в осевом направлении, действуют как несминающиеся линейные опоры для расположенных между ними горизонтальных участков внешних

слоев. Опоры в местах примыкания горизонтальных участков к наклонным принимаются в качестве шарнирных. Для трапециевидальной многослойной конструкции, согласно рис. 43, это означает, что:

участок BC следует рассчитывать как плоский, очень длинный, шарнирно-опертый пролет панели шириной $b = S_3$, на который постоянно воздействуют сжимающие напряжения;

наклонные стенки AB и CD следует рассчитывать как плоские, очень длинные, шарнирно-опертые пролеты панели шириной $b = S_2$ под действием линейно-переменного по ширине нормального напряжения.

Устойчивость многослойной складчатой конструкции на смятие при определенной нагрузке существует тогда, когда в каждой зоне выпучивания складчатой конструкции для нормальных напряжений внешних слоев выполняется неравенство $\sigma_i \leq \sigma_{ik}/f$, где f — требуемый коэффициент надежности.

Пример. Имеется трапециевидальный "сэндвич", как показано на рис. 43, при $S_2 = 8$ см, $S_3 = 20$ см, $t = 1$ мм, $\nu_D = 0,3$, $\nu_K = 0$, $E_D = 2 \cdot 10^6$ кгс/см², $E_K = 80$ кгс/см², $G_K = 40$ кгс/см², $\sigma_1 = -1000$ кгс/см², $\sigma_2 = 1200$ кгс/см², $\sigma_D = 2880$ кгс/см² (сталь St 52). Получим $B_D = 192,3$ кгс/см, $K = 53,33$ кгс/см², $\psi = 1$.

а) Для горизонтального участка
При $b = S_3$:

$$\begin{aligned} \psi &= 1; & \chi &= 2,29; \\ u &= 1,886; & c_K &= 8,326; \\ \alpha_K &= 5,00 \text{ см}; & \sigma_{Kk} &= 2469 \text{ кгс/см}^2. \\ f &= 2,47; \end{aligned}$$

б) Для наклонного участка
При $b = S_2$ и в соответствии с табл. 8.5:

$$\begin{aligned} \psi &= -1,2; & b_0 &= 7,44 \text{ см}; \\ \chi &= 1,842; & u &= 1,821; \\ c_K &= 7,644 \pi^2; & \alpha_K &= 4,86 \text{ см}; \\ \sigma_{Kk} &= 2621 \text{ кгс/см}^2; & f &= 2,62. \end{aligned}$$

В обоих случаях σ_{Kk} находится ниже границы пропорциональности σ_D диаграмм σ, ϵ . Решающее значение для устойчивости к смятию, несмотря на значительно меньшую ширину зоны выпучивания, имеет горизонтальный верхний участок.

8.4.2. Смятие при конструктивно неоднородном среднем слое. Смятие внешних слоев. Рассмотрим средний слой ячеистой структуры (см. рис. 19). Находящийся под действием сжимающего напряжения внешний слой многослойной панели выпучивается в зоне под сотовыми полосами. Для расчета критической нагрузки, при которой начинается выпучивание, принимаются следующие упрощения:

шестиугольные ячейки заменяются одинаковыми по площади прямоугольными ячейками (рис. 45);

каждый отдельный прямоугольный пролет внешнего слоя принимается за шарнирно-опертый по контуру;

каждые два соседних ряда прямоугольников (так же как и ряды шестиугольников) смещены в направлении y на размер $b/2$.

Для расчета критической нагрузки, вызывающей выпучивание прямоугольной зоны, можно исходить из уравнения (7.46) при $x = b_1/b$, $z = b_2/b$, предположив, что $r = 0$, а B_5 заменив на B_D :

$$P_{ijk} = c_{ijk} \frac{B_D}{b^2}; \quad c_{ijk} = \pi^2 \frac{(x^2 j^2 + k^2)^2}{x^2 j^2 + z k^2}. \quad (8.65)$$

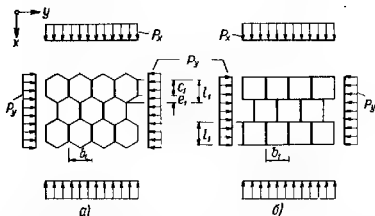


Рис. 45. Внешний слой, на который действует сжимающая нагрузка, со средним слоем панели сотовой структуры
 а — средний слой из ячеек шестигранной формы; б — средний слой — заменитель из ячеек прямоугольной формы

Для определения критической нагрузки, вызывающей выпучивание P_{xk} , необходимо минимизировать c_{xjk} согласно (8.65) относительно j и k , причем j и k должны быть целыми числами. При ячейках шестигранной формы, согласно рис. 45, $\alpha < 1$ и $z < 1$. Эюра выпучивания в направлении y состоит тогда только из синусоидальной полуволны, т.е. $k = 1$. Минимизирование c_{xj} относительно j после краткого расчета с помощью вспомогательных величин:

$$Z_{12} = \frac{1-4\alpha^4}{2+5\alpha^2}; \quad Z_{23} = \frac{1-36\alpha^4}{2+13\alpha^2}; \quad Z_{34} = \frac{1-144\alpha^4}{2+25\alpha^2} \quad (8.66)$$

дает следующие значения выпучивания:

$$\begin{aligned} \text{при } Z \geq Z_{12} \quad j=1, \quad c_x &= \pi^2 \frac{(1+\alpha^2)^2}{Z+\alpha^2}; \\ \text{при } Z_{12} \geq Z \geq Z_{23} \quad j=2, \quad c_x &= \pi^2 \frac{(1+4\alpha^2)^2}{Z+4\alpha^2}; \\ \text{при } Z_{23} \geq Z \geq Z_{34} \quad j=3, \quad c_x &= \pi^2 \frac{(1+9\alpha^2)^2}{Z+9\alpha^2}. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Если, например, $Z \geq Z_{12}$, тогда напряжения при выпучивании $\sigma_{xk} = P_{xk}/t$ с учетом (8.6), (8.67) и B_D согласно (8.47), получим:

$$\sigma_{xk} = \alpha_x E_D \left(\frac{t}{b_x} \right)^2; \quad \alpha_x = \frac{\pi^2 (1+\alpha^2)^2}{12 (1-\nu_D^2) (Z+\alpha^2)}. \quad (8.68)$$

Например, уравнения (8.68) для $\alpha = 1, Z = 0 > Z_{12} = -0,428$ и $\nu_D = 0,3$ дают значение $\alpha_x = 3,61$.

Смятие стенок ячеек. Рассмотрим снова средний слой со структурой в форме шестигранных ячеек (см. рис. 19). У многослойной панели, находящейся под действием поперечной силы, стенки ячеек работают на сдвиг [ср. (2.219) и (2.223)], которые после превышения определенной критической нагрузки могут выпучиваться. При расчете критической нагрузки, вызывающей выпучивание, предполагается, что стенки ячеек это шарнирно опертые по контуру прямоугольные пролеты с размерами сторон h и c , и соответственно h и S , и толщинами $2t_s$ или t_s . Предположение шарнирного опирания, по крайней мере вдоль клевого соединения с внешними слоями (прямоугольные стороны c и соответственно S), наиболее достоверно.

Касательные напряжения выпучивания $\tau_{\pm zk}$ можно записать в виде

$$\tau_{\pm zk} = c_{\pm z} \frac{B_K}{h^2 t_K}, \quad (8.69)$$

где $c_{\pm z}$ — коэффициент выпучивания, зависящий от соотношения сторон a ; z — направление координат вертикально к внешним слоям; $\pm$ — направление координат параллельно внешним слоям внутри исследуемой стенки ячейки; t_K — толщина стенки ячейки; h — высота среднего слоя; a — соотношение сторон (согласно рис. 19 c_z/h , соответственно S_z/h) и $B_K = E_K t_K^3 / 12(1 - \nu_K^2)$ — жесткость стенки ячейки на изгиб.

Коэффициенты выпучивания $c_{\pm z}$ даны в табл. 8.7. Уравнение (8.69) можно также записать в виде:

$$\tau_{\pm zk} = \alpha_{\pm z} E_K \left(\frac{t_K}{h} \right)^2; \quad \alpha_{\pm z} = \frac{c_{\pm z}}{12(1 - \nu_K^2)}. \quad (8.70)$$

Уравнения (8.70), например, для $a=1$ и $\nu_K=0$ дают значения $\alpha_{\pm z}=7,68$.

Таблица 8.7. Коэффициенты выпучивания $c_{\pm z}$ для некоторых соотношений сторон a

a	$c_{\pm z}/\pi^2$	a	$c_{\pm z}/\pi^2$
0,3	64,35	1,2	7,94
0,4	37,79	1,5	7,08
0,5	26,21	2	6,55
0,6	18,98	2,5	6,05
0,7	14,71	3	5,85
0,8	12,15	3,5	5,75
1	9,34	4	5,64

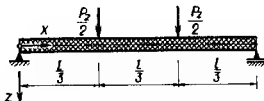
8.4.3. Предельная нагрузка многослойных панелей. Общие положения.

Рассмотрим многослойную балку с тонкими внешними и толстыми средними слоями под действием двух сосредоточенных сил (рис. 46). В качестве предельной нагрузки, вызывающей смятие многослойной балки; обозначим ту поперечную нагрузку P_{zk} , при которой во внешнем слое, испытывающем сжимающее напряжение, впервые достигается напряжение смятия σ_{sk} , согласно (8.48). В случае системы, изображенной на рис. 46, где в средней зоне действует постоянный момент изгиба $M = Pl/6$,

$$P_{zk} = \frac{6W\sigma_{sk}}{l} = \frac{6bat\sigma_{sk}}{l}. \quad (8.71)$$

Предельная нагрузка P_{zk} не всегда совпадает с действительной предельной нагрузкой P_{zT} многослойной балки. С одной стороны, возникшее в процессе производства небольшое коробление внешнего слоя, в котором действует сжимающее напряжение, может вызывать столь большие дополнительные напряжения и деформации в среднем и внешних слоях, что многослойная балка сломается еще до достижения теоретического напряжения смятия σ_{sk} . С другой стороны, при очень ровных внешних слоях предельная нагрузка многослойной балки может быть иногда и выше теоретической предельной нагрузки, вызывающей смятие, так как после ее превышения амплитуды образовавшихся волн смятия должны достигнуть лишь известной величины, пока многослойная балка не будет разрушена разломом среднего слоя или разрывом внешнего слоя.

Рис. 46. Шернирно-опертая по двум сторонам балка под действием двух сосредоточенных усилий



Влияние предварительного коробления внешних слоев на предельную нагрузку. Пусть ход предварительного коробления внешнего слоя, в котором действует сжимающее напряжение, задан следующим выражением:

$$w_1 = W_1 \sin \frac{\pi x}{\alpha_x}. \quad (8.72)$$

Длина волны предварительного коробления выбирается совпадающей с длиной волны смятия α_x согласно (8.48). Сжимающее усилие P_x , действующее во внешнем слое, из-за предварительного коробления имеет следствием момент изгиба M , равный $P_x w_1$, так что проблема устойчивости внешнего слоя с упругим подстилающим основанием становится проблемой напряжений по теории второго порядка. Основное дифференциальное уравнение легко получается из (8.36) с учетом $\partial/\partial y = 0$, $P_y = 0$, $P_{xy} = 0$, а также добавлением члена нагрузки $q = -M'' = -P_x w_1''$ и имеет вид

$$w'''' + \frac{P_x}{B_D} w'' + \frac{C}{B_D} w = - \frac{P_x}{B_D} w_1''. \quad (8.73)$$

При w_1 , согласно (8.72), и условии решения

$$w = w_0 \sin \frac{\pi x}{\alpha_x} \quad (8.74)$$

после краткого расчета получим амплитуду деформации

$$w_0 = \frac{P_x}{\frac{\pi^2 B_D}{\alpha_x^2} + \frac{C \alpha_x^2}{\pi^2} - P_x} W_1. \quad (8.75)$$

С учетом (8.35), (8.39), (8.40) и $\varphi = 0$ можно доказать, что сумма двух первых слагаемых знаменателя в уравнении (8.75) равна предельной нагрузке, вызывающей смятие P_{xk} ; из уравнения (8.75) следует, что

$$w_0 = \frac{\alpha}{1-\alpha} W_1, \quad \alpha = \frac{P_x}{P_{xk}} = \frac{\sigma_x}{\sigma_{xk}}. \quad (8.76)$$

Для напряжений σ_x на поверхности среднего слоя, вызванных смещением внешнего слоя w , согласно (8.74), имеет место

$$\sigma_x = -p(x, y) = c w_0 \sin \frac{\pi x}{\alpha_x}.$$

Их максимальное значение достигается при $c = K\pi/\alpha_x$ согласно (8.33), поскольку предполагается, что $\lambda = \pi/\alpha_x$ и $f = 0$. Таким образом,

$$\sigma_x = c w_0 = \frac{\pi \alpha}{1-\alpha} \frac{W_1}{\alpha_x} K. \quad (8.77)$$

Если σ_x достигает предела прочности при растяжении σ_{xkb} материала среднего слоя, то решением (8.77) относительно $\alpha = \alpha_T$ получим

$$\alpha_T = \frac{\sigma_{xT}}{\sigma_{xk}} = \frac{1}{1 + \pi \frac{W_1}{\alpha_x} \frac{K}{\sigma_{xkb}}}, \quad (8.78)$$

где $\sigma_{\text{сж}}$ — напряжения внешнего слоя, работающего на сжатие, вызываемое предельной нагрузкой. Если в уравнение (8.79) подставить еще и K согласно (8.35) и учесть при этом, что для $\nu_K = 0, \dots, 0,3$

$$\frac{2\sqrt{2}(1-\nu_K)}{(3-4\nu_K)\sqrt{1+\nu_K}} \approx \frac{B}{\pi} = \text{const},$$

тогда для напряжения, вызываемого предельной нагрузкой, получим приближенную формулу

$$\sigma_{\text{сж}} = \frac{\sigma_{\text{сж}}}{1 + 3 \frac{W_f \sqrt{G_K E_K}}{\alpha_K \sigma_{\text{сж}K}}} \quad (8.79)$$

Напряжение $\sigma_{\text{сж}}$, вызываемое предельной нагрузкой, следовательно, меньше, чем теоретическое напряжение смятия $\sigma_{\text{сж}K}$.

Пример. Имеется многослойная балка со средним слоем из пенополиуретана массой 50 кг/м^3 ($G_K = 30 \text{ кгс/см}^2$, $E_K = 70 \text{ кгс/см}^2$, $\sigma_{\text{сж}K} = 2,2 \text{ кгс/см}^2$) и стальными внешними слоями с относительной волнистостью.

Получим

а) при $W_f/\alpha_K = 0,001$:

$$\sigma_{\text{сж}} = 0,941 \sigma_{\text{сж}K}, \text{ т.е. с учетом уравнений (8.50)}$$

$$\sigma_{\text{сж}} = 0,77 \sqrt{G_K E_K E_D} = 1265 \text{ кгс/см}^2;$$

б) при $W_f/\alpha_K = 0,01$:

$$\sigma_{\text{сж}} = 0,615 \sigma_{\text{сж}K}, \text{ т.е. с учетом уравнения (8.50)}$$

$$\sigma_{\text{сж}} = 0,50 \sqrt{G_K E_K E_D} = 820 \text{ кгс/см}^2.$$

При $W_f/\alpha_K = 0,01$ (как в случае "б") относительная волнистость внешних слоев во многих случаях слишком завышена. Несмотря на это, получаемая формула для определения напряжений, вызываемых предельной нагрузкой, а именно

$$\sigma_{\text{сж}} = 0,50 \sqrt{G_K E_K E_D}, \quad (8.80)$$

часто встречается в литературе.

Несущая способность, превышающая теоретическую предельную нагрузку, вызывающую смятие. Расчет амплитуды волн смятия w_0 внешнего слоя многослойной конструкции под действием в нем сжимающего напряжения после превышения теоретической предельной нагрузки $P_{\text{сж}}$, вызывающей смятие, математически сложен, так как в основном дифференциальном уравнении изгиб k нельзя больше заменить линейным выражением w'' . Поэтому в данном случае проводится лишь качественное сравнение. Обозначим длину балки α_K , а жесткость на изгиб — B_D . Предположим, что обе сравниваемые системы ведут себя одинаково. Для не слишком больших прогибов

$$P_{\text{сж}} = \frac{\pi^2 B_D}{\alpha_K^2}, \quad \alpha = \frac{P_{\text{сж}}}{P_{\text{сж}}} \quad (8.81)$$

после некоторого преобразования справедливо отношение

$$w = w_0 \sin \frac{\pi x}{\alpha_K}, \quad w = \frac{2\alpha_K}{\pi} \sqrt{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}}. \quad (8.82)$$

Если, например, $P_{\text{сж}}$ превысит предельную нагрузку, вызывающую смятие, лишь на 1% ($\alpha = 1,01$), тогда (8.82) даст $w_0/\alpha_K = 0,09$. Ясно, что уже незначительное превышение предельной нагрузки, вызывающей смятие, ведет к значительным амплитудам волн смятия. С другой стороны,

незначительная волнистость внешнего слоя (примерно $w_1/\alpha_s = 0,01$) вызывает значительные напряжения σ_{zk} в среднем слое, а тем самым предельная нагрузка многослойной бапки может опуститься ниже предельной нагрузки, вызывающей смятие. Поэтому очевидно, что предельная нагрузка P_{Σ} многослойной бапки с идеально ровными внешними слоями в обычном случае не может быть существенно больше предельной нагрузки $P_{\Sigma k}$, вызывающей смятие. Только в случае среднего слоя с очень большой прочностью на растяжение $\sigma_{zkB} P_{\Sigma}$ может быть на несколько процентов больше, чем $P_{\Sigma k}$, но при этом возникают большие амплитуды волн смятия.

8.4.4. Смятие в упругой зоне. Диаграмма "напряжение — растяжение".

Расчет напряжения σ_k , вызывающего смятие по приведенным в предыдущих разделах формулам, предполагает линейную диаграмму "напряжение — удлинение" материала внешних слоев. Если при этом получается идеальное значение напряжения σ_{kl} , которое больше предела пропорциональности σ_p материала внешних слоев, то данные методы расчета необходимо изменить, чтобы охватить и нелинейную область в диаграммах σ, ϵ . В соответствии с ДИН 4114 (раздел 7.4.2) основных направлений, диаграмма σ, ϵ посредством

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E \epsilon && \text{для } \epsilon \leq \sigma_p/E, \\ \sigma &= \sigma_p + (\sigma_s - \sigma_p) \tanh \frac{E \epsilon - \sigma_p}{\sigma_s - \sigma_p} && \text{для } \epsilon > \sigma_p/E \end{aligned} \right\} \quad (8.83)$$

приближена в зоне сжатия для строительных сталей, где $\sigma > 0$ — сжатие, а $\epsilon > 0$ — деформация при сжатии. Например, для стали St 37 справедливо $\sigma_s = 2400$ кгс/см², $\sigma_p = 0,80 \sigma_s = 1920$ кгс/см²; для стали St 52 $\sigma_s = 3600$ кгс/см², $\sigma_p = 0,8 \sigma_s = 2880$ кгс/см². С учетом уравнений (8.83) получим:

для тангенциального модуля упругости $E_t = d\sigma/d\epsilon$ при напряжении $\sigma = \sigma_k$

$$\left. \begin{aligned} E_t &= E && \text{для } \sigma_k \leq \sigma_p, \\ E_t &= e E, \quad e = 1 - \left(\frac{\sigma_k - \sigma_p}{\sigma_s - \sigma_p} \right)^2 && \text{для } \sigma_p \leq \sigma_k \leq \sigma_s; \end{aligned} \right\} \quad (8.84)$$

для касательного модуля Энгессера, согласно ДИН 4114 (раздел 7.4.2), при прямоугольной форме поперечного сечения¹

$$T = \frac{4 E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2} = \left(\frac{2\sqrt{e}}{1 + \sqrt{e}} \right)^2 E; \quad (8.85)$$

для связности между действительным критическим напряжением при продольном изгибе σ_k и идеальным σ_{kl} , которое получается в диаграмме σ, ϵ при неограниченной истинности линейной зоны

$$\sigma_k = \frac{T}{E} \sigma_{kl} = \left(\frac{2\sqrt{e}}{1 + \sqrt{e}} \right)^2 \sigma_{kl}. \quad (8.86)$$

С помощью уравнений (8.84) — (8.86) известны все выражения, которые необходимы для расчета напряжения σ_k при упруго-пластическом смятии. Ради упрощения ограничимся многослойной балкой. Ниже даны два метода расчета.

¹ Имеет место при плоских внешних слоях.

Уменьшение идеального напряжения смятия σ_{ki} . С помощью уравнения (8.86) показана зависимость между σ_k и σ_{ki} . Если уравнение (8.86) решить по σ_k , с учетом зависимости ϵ от σ_k согласно (8.84), то получится отношение, определение численных значений которого для стали St 37 и St 52 приведено в табл. 8.8. Данные значения идентичны значениям ДИН 4114 (табл. 7). Таким образом получаем простой способ для приближенного определения критического напряжения при пластическом смятии внешних слоев. Идеальное напряжение, вызывающее смятие σ_{ki} , рассчитывается так же, как при неограниченно действительной линейно-упругой диаграмме σ, ϵ . Если при этом получается $\sigma_{ki} > \sigma_p$, то следует сократить σ_{ki} , согласно табл. 8.8, на меньшее значение σ_k . Тогда σ_k будет наиболее достоверным приближенным значением напряжения, вызывающего смятие многослойной панели с учетом нелинейно-пластичной для $\sigma > \sigma_p$ диаграммы σ, ϵ .

Таблица 8.8. Уменьшение напряжения смятия

Сталь St 37		Сталь St 52	
$\sigma_{ki}, \text{кгс/см}^2$	$\sigma_p, \text{кгс/см}^2$	$\sigma_{ki}, \text{кгс/см}^2$	$\sigma_p, \text{кгс/см}^2$
1920	1920	2880	2880
2000	1983	3000	2974
2200	2077	3200	3077
2400	2136	3400	3149
2600	2178	3600	3204
2800	2209	3800	3248
3000	2233	4000	3284
3500	2274	4500	3349
4000	2300	5000	3394
5000	2331	6000	3450
10000	2374	10000	3532
∞	2400	∞	3600

Пример. Имеется многослойная балка с внешними слоями из стали St 37 ($E_p = 2\,100\,000 \text{ кгс/см}^2$, $\sigma_p = 1920 \text{ кгс/см}^2$) и средним слоем из пенополиуретана объемной массой 100 кгс/м^3 ($G_k = 80 \text{ кгс/см}^2$, $E_k = 200 \text{ кгс/см}^2$). Уравнение (8.50) дает значение напряжения, вызывающего смятие $\sigma_{ki} = 2646 \text{ кгс/см}^2 > \sigma_p$. Сокращение, согласно табл. 8.8, дает $\sigma_k = 2185 \text{ кгс/см}^2$.

Расчет с помощью касательного модуля Энгессера. Касательный модуль Энгессера дан в уравнении (8.85). Численное определение уравнения (8.85) для стали St 37 и St 52 представлено в табл. 8.9. Таким образом, получаем способ для определения практического напряжения при пластическом смятии внешних слоев. Подставим в основные выражения, т.е. в (8.47), (8.48) или (8.50), вместо E_p модуль Энгессера T_p внешних слоев и рассчитаем для него напряжение σ_k , вызывающее смятие. Так как, согласно (8.85) или табл. 8.9, T_p зависит от σ_k , а σ_k к началу расчета еще неизвестно, то сначала необходимо определить значение σ_k , соответствующий T_p — модуль которого будет затем использован. Если определенное таким образом значение σ_k не совпадает с первоначальным, то следует повторять прием с уточненными оценками до тех пор, пока оценки и расчетное значение не совпадут. Тогда σ_k является точным значением напряжения, вызывающего смятие многослойной

балки с учетом зависимости для $\sigma > \sigma_p$ нелинейно-пластичной диаграммы σ, ϵ .

Таблица 8.9. Касательные модули Энгессера

Сталь St 37		Сталь St 52	
σ_s , кгс/см ²	T , МПа	σ_s , кгс/см ²	T , МПа
1920	2100	2880	2100
2000	2071	3000	2071
2050	2021	3100	1998
2100	1944	3200	1876
2150	1835	3300	1687
2200	1687	3400	1404
2250	1487	3450	1208
2300	1208	3500	954
2350	795	3550	603
2400	0	3600	0

Пример. Имеется такая же многослойная балка, как и в п. 8.4.4. Если полученное там значение напряжения смятия $\sigma_k = 2185$ кгс/см² выбрать в качестве первой оценки, то уравнение (8.85) дает $T_p = 1736$ МПа/см², в результате чего из уравнений (8.50) следует, что $\sigma_k = 2483$ кгс/см². Следовательно, оценка и расчетное значение не совпадают. Многократное повторение приема дает, наконец, при T -модуле, равном 1341 МПа/см², значение напряжения смятия $\sigma_k = 2278$ кгс/см², т.е. на 4,3% большее значение, чем в п. 8.4.4. Приближенный метод с сокращенными величинами напряжения, следовательно, является наиболее достоверным.

9. СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

9.1. ЦЕЛЬ ИСПЫТАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Цель испытания строительных элементов, как и теоретических исследований, — проверить поведение строительного элемента под воздействием внешних факторов. В данной главе в качестве внешних факторов рассматриваются статические и динамические нагрузки, а также температуры. Так как испытания дороже теоретических расчетов, то первые проводятся только в том случае, если:

еще не существует приемлемой теории;

уже разработанная теория нуждается в практическом подтверждении.

Часто задается вопрос, следует ли в случае новой технической разработки сначала проводить испытания и на основе их результатов создавать теорию, приемлемую для практики, или, наоборот, сначала разработать теорию, которая затем должна быть подтверждена или дополнена результатами испытаний. На практике обе альтернативы чаще всего рассматриваются вместе, так что непосредственной противоположности между ними нет.

В любом случае практически приемлемая теория содержит в себе идеализированные предпосылки упрощения и пренебрежения. Поэтому вероятно, что результаты испытаний точнее и больше соответствуют действительности, нежели результаты, полученные теоретическим путем.

Но это возможно лишь в том случае, когда в испытании можно точно воспроизвести действительные условия. В случае строительных элементов это прежде всего касается видов опирания испытываемых образцов и введения нагрузок. При этом часто возникают трудности, так как, например, приложение равномерно распределенной поперечной нагрузки влечет за собой значительные затраты, а непрерывное, просто замеряемое увеличение нагрузки затруднительно. Если испытания служат подтверждению одной теории, тогда идеализации, положенные в основу теории, например шершневое опирание, также должны быть воспроизведены в испытании.

Далее дано краткое описание вопросов построения испытаний и различных технико-экономических способов контроля многослойных строительных элементов, а также их аттестации для практического применения. Это делается на примере широкой серии испытаний. В частности, проводимые испытания служили для контроля многослойных строительных элементов в условиях, приближенных к практике, но их основная часть отводилась контролю и подтверждению теории многослойных конструкций, разработанной в предыдущих главах.

9.2. СТАТИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

9.2.1. Опирание и распределение нагрузки. Необходимо четко различать, должен ли проверяться в соответствии с его практическим применением определенный строительный элемент или посредством испытаний не допустить подтверждение общей теории. Рассмотрим оба случая.

Испытания многослойных строительных элементов в условиях, приближенных к практике. Несущий стеновой элемент для панельного сборного строительства подвергается следующим нагрузкам:

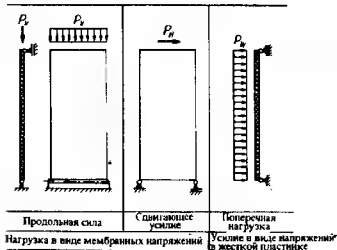
вертикальной силе P_v , возникающей вследствие нагрузок на перекрытия и крышу, которые действуют как нормальная сила в плоскости стенового элемента;

горизонтальной силе P_h , являющейся следствием ветровой нагрузки на кровельные и междустажные элементы и действующей как касательная сила в плоскости стенового элемента;

горизонтальной нагрузке P_w , возникающей вследствие прямого ветрового давления на стену и действующей вертикально к плоскости стенового элемента. Стеновая панель воспринимает действие сил P_v, P_h как мембрана, а от силы P_w — как жесткая плита. Виды опирания и нагрузок схематично представлены на рис. 47.

Для определения несущей способности многослойного стенового элемента под действием сил P_v и P_w в Институте стетик и стальных конструкций (г. Дармштадт, ФРГ, проф. Клеппель) были проведены испытания с помощью испытательного устройства, которое схематично представлено на рис. 48,а. Вертикальная сила P_v создавалась посредством гидравлического домкрата и через распределительное устройство передачи нагрузки передавалась как равномерно распределенная поперечная нагрузка на торец многослойной панели. Так как приложить равномерно распределенную горизонтальную нагрузку P_w трудно, то ее заменили горизонтальной силой прижима P_w , приложенной в центре панели, которая вызывает такой же прогиб панели, что и P_w . Так как стеновой элемент имел окаймляющую раму жесткости из С-профиля, то числа P_w

Рис. 47. Опирание и виды нагрузок многослойного стенового элемента



передавалась на окаймляющую раму справа и слева, что позволяет избежать вдавливания на тонком внешнем слое многослойного элемента. Согласно предписаниям относительно расчетных нагрузок, для сооружения, монтируемого из подобных стеновых элементов, существует определенная максимальная величина для ветровой нагрузки P_w . Поэтому для испытания предельной нагрузки P_w была увеличена на принятый для стальных конструкций коэффициент запаса $f = 1,71$. Полученная величина была приложена в качестве поперечной нагрузки и в течение всего испытания поддерживалась постоянной. Затем была приложена нагрузка P_v , которая увеличивалась до тех пор, пока не возникли недопустимо большие прогибы; полученное при этом значение P_v являлось искомой вертикальной предельной нагрузкой P_{vt} многослойного стенового элемента.

В том же институте исследовалась способность многослойного стенового элемента воспринимать мембранную нагрузку P_H посредством проведения испытаний с помощью устройства, показанного на рис. 48,б. Горизонтальная сила P_H прилагалась домкратом и через окаймляющий профиль в виде сдвигающего усилия передавалась на многослойный элемент. Увеличение нагрузки осуществлялось только до достижения горизонтальной силой P_H ее значения при максимальной ветровой нагрузке с учетом коэффициента f . Многослойный элемент это выдержал. Раздельное проведение испытания плоской системы без одновремен-

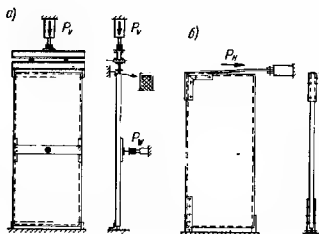


Рис. 48. Устройство для испытания стенового элемента на предельную нагрузку
а — силы P_v и P_w ; б — сила P_H

ного действия P_v и P_w допустимо, так как P_v не вызывает вертикальных деформаций стенового элемента и поэтому едва влияет на его несущую способность от действия P_v и P_w .

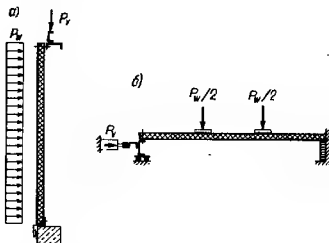
Дальнейшие испытания многослойных строительных элементов от действия практически возникающих нагрузок проводились с панелями "Hoesch-isowand" исследовательской лабораторией стали, дерева и камня в высшем техническом учебном заведении г. Карлсруэ (ФРГ) (проф. Штайнхердт). Панели "Hoesch-isowand" применяются для облицовки стен. В качестве нагрузки они должны воспринимать действующее нормальное к их плоскости ветровое давление P_w и передавать его на стеновые обвязочные балки, которые на расстоянии 2,5–5 м служат поддерживающей конструкцией. В качестве вертикальной силы возникают только нагрузки от собственного веса стеновой конструкции и от веса пенточного остекления, опирающегося на облицовку стены. Конструктивные характеристики панелей "Hoesch-isowand" подробно описаны в главе 12, а испытательная установка представлена на рис. 49. Испытания проводились на панелях, расположенных горизонтально. Ветровая нагрузка P_w передавалась в виде сил, приложенных к панели через поперечные траверсы в третья пролета многослойного элемента. Величина сил равнялась максимальной ветровой нагрузке, увеличенной на коэффициент f , и поддерживалась постоянной в течение всего испытания. Нормальная сила P_v передавалась посредством домкрата через стеновую обвязочную раму, распределяющую нагрузку по стеновому элементу, который был прикреплен к бапке, как и на практике, тремя сквозными болтами М6. Хотя многослойный элемент и выдержал f -кратную величину нормальной силы собственного веса P_v , но при дальнейшем увеличении нагрузки винтовые отверстия соединений значительно деформировались во внешних слоях панели, толщина которых составляла лишь 0,5 мм. Болты принимали наклонное положение и в конце концов ломались. Следовательно, в данном случае решающее значение для предельной нагрузки имело конструктивное оформление передачи усилия.

Основные испытания, подтверждающие теорию многослойных конструкций. Для проверки разработанной в предыдущих главах теории многослойных конструкций в планово-производственном отделении фирмы "Хёш АГ" ("Hoesch AG", ФРГ) была осуществлена обширная программа исследований несущей способности плоских и волнистых трапецеидальных многослойных балок под действием изгибающих усилий. Программу осуществлял Институт конструктивного инженерного строительства университета г. Бохум, Рурская область, ФРГ (проф. Церна). Для исследования несущей способности необходимо было создать простое, приближенное к практике и однозначное напряженное состояние. Это требование выполняется одноосным состоянием изгиба. Поэтому было выбрано положение, согласно которому:

опирание испытуемых образцов как одномерной несущей конструкции, т.е. балки, осуществлялось шернирными линейными опорами;

нагрузка испытуемых образцов сосредоточенными силами прикладывалась в третья пролета, где в средней трети бапки изгибающий момент постоянный, а поперечная сила равна нулю. При этом длина средней трети балки по сравнению с ее высотой была достаточно большой, так что независимо от сложного пространственно напряженного состояния в местах приложения нагрузки в середине испытуемого образца,

Рис. 49. Испытания под нагрузкой панели „Hoesch-Isowald“
а — стеновая конструкция;
б — схема испытания



где происходят все изменения, может установиться ненарушаемое, ровное напряженное состояние. Особое внимание уделялось приложению нагрузки в местах деления балки на трети и в местах расположения опор (рис. 50 и 51), чтобы по возможности более точно выполнить предпосылки теории и, насколько это возможно, избежать местных возмущающих воздействий. Шарнирное опирание обеспечивалось шарнирными элементами, которые располагались по всей ширине балки на стальных несущих элементах. Приваренное листовое железо и эбонитовые прокладки способствовали передаче опорных реакций на многослойную бабку в виде хорошо распределенных поверхностных нагрузок, а местные вдавливания тонкого внешнего слоя не наблюдались. Подобным же образом осуществлялось и равномерное введение нагрузки по ширине бабки в местах ее деления на трети. В случае трапецидальных многослойных бабок применялись трапецидальные деревянные элементы с эбонитовыми прокладками, чтобы на опорах и в местах деления бабки на треть достичь равномерного приложения нагрузки. Вся испытательная установка для плоских и трапецидальных многослойных балок показана на рис. 52 и 53. В рассмотренных испытательных установках приложение нагрузки происходило с помощью гидравлического домкрата, применение которого имеет следующие преимущества:

- простое, непрерывное увеличение нагрузки выдвиганием цилиндра;
- простое измерение и постоянный контроль величины силы посредством замера давления в гидравлическом цилиндре.

Недостатки такого образования нагрузки заключаются в том, что: она осуществляет передачу только сосредоточенных нагрузок, между тем как на практике в большинстве случаев возникают равномерно распределенные по всей плоскости или линейные нагрузки;

величина усилия зависит от деформации: так, например, при жесткой установке цилиндра при процессах ползучести в многослойной бабке с течением времени усилие уменьшается.

Первый недостаток можно уменьшить, применив траверсы, распределяющие нагрузку вдоль бабки по схеме, показанной на рис. 54. Таким образом, единичное усилие P разлагается на 2^n единичных усилий величиной $P_1 = P_2$ и тем самым с увеличением n возрастающе приближается к равномерной сосредоточенной или поверхностной нагрузке. Если необходимо полностью избежать оба недостатка, то нагрузку можно при-

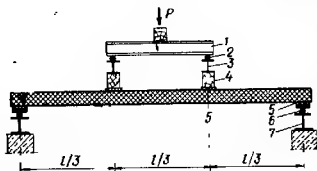


Рис. 50. Испытательная установка и передача нагрузки на конструкцию в случае плоских многослойных балок

1 — балка, распределяющая нагрузку; 2 — цилиндрический шарнир; 3 — распределение поперечной нагрузки; 4 — деревянный брус; 5 — эбонит; 6 — шарнирная опора; 7 — опора

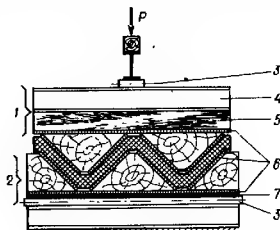


Рис. 51. Передача нагрузки при трапецидальных многослойных панелях

1 — передача нагрузки в местах деления "сэндвича" на трети; 2 — передача нагрузки у опор; 3 — шарнирный узел; 4 — траверса; 5 — деревянный брус; 6 — эбонит; 7 — листовое железо

ложить в виде грузов (мешков с песком, песка рассыпью, кирпичей). Но при этом проблематичным является определение веса, которое должно производиться от испытания к испытанию, так как эти виды грузов воспринимают влагу, а тем самым подвержены колебаниям веса. Более точной является нагрузка откалиброванными металлическими грузами (например, стальными прокатными заготовками). Этот вид имеет преимущества, например, при длительных испытаниях, где испытываемая балка претерпевает процесс ползучести, т.е. все время увеличивает свой провес под постоянной во времени нагрузкой. Чтобы постоянно действовать домкратом, что при испытаниях в течение длительного времени практически невозможно. Если рассматривать виды нагрузки, то родственной гидравлическому цилиндру является пневматическая нагрузка с помощью пневмомешков, расположенных между многослойной панелью, на которую должна действовать равномерная поверхностная нагрузка, и опорной панелью. Наконец, необходимо упомянуть о нагрузке водой, равномерно распределенной по поверхности. Такая нагрузка подходит для испытания в промышленном масштабе с большими грузами, так как вода имеется в неограниченном количестве и недорога. Единственная затрата состоит в производстве водонепроницаемой ванны поверх испытываемой панели. Если приходится ожидать больших прогибов, то необходимо, разумеется, учесть увеличение нагрузки в зоне наибольшего прогиба.

9.2.2. Измерение усилий, деформаций, напряжений и перемещений.

Общие положения. При испытаниях статической нагрузки интерес представляют прежде всего напряженное состояние и деформации под действием внешней силы. Усилия и деформации могут измеряться непосред-

Рис. 52. Испытания плоских многослойных балок



Рис. 53. Испытания трапецидальных многослойных балок



ственно или через другие измеряемые параметры, если имеется однозначное соотношение между измеряемой и искомой величинами. К прямым методам измерений относится, например, измерение прогиба с помощью масштабной линейки, установленной на панели против неподвижной исходной точки. К косвенным методам измерений относится определение напряжений по измеренной деформации. Подробно сам процесс измерений здесь не рассматривается. Перечисляются только приборы и методы, используемые в рассматриваемых испытаниях и дается указание, которые важны для практического применения измерительных методов.

Измерение усилий. Усилия в зависимости от испытательной установки измеряются взвешиванием грузов, создающих нагрузку, гидравлическим или электрическим динамометром или с помощью тензометра с омическим датчиком. При определении предельной нагрузки важно знать наибольшую достижимую степень нагружения. Так как после достижения предельной величины воспринимаемая конструкцией нагрузка снижается, необходимо или постоянно записывать уровень нагрузки, или в качестве индикатора применять инструмент с контрольной стрелкой.

Измерение деформаций и напряжений. Для измерения деформаций и напряжений испытуемого образца служат тензометры с омическим

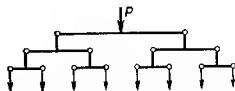


Рис. 54. Передача нагрузки с помощью продольных траверс

датчиком, которые наклеиваются в соответствующих точках и фиксируют деформацию материала испытуемого образца.

Напряжения в большинстве случаев измеряются по деформациям. С помощью закона Гука в случае двухосного напряженного состояния получается:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\alpha E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{\alpha E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x), \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

где ϵ_x и ϵ_y — измеренные растяжения (сжатия); E и ν — модуль упругости и коэффициент поперечной деформации испытуемого образца; α — поправка, величина которой наряду с прочим зависит от длины измерительного кабеля и омического номинального сопротивления тензометрической полоски. Формулы (9.1) справедливы только для упругой зоны, где напряжения и деформации пропорциональны один другому. Вне этой зоны необходимо в основу положить нелинейную диаграмму σ, ϵ , характерную для испытуемого материала.

Важным является рациональный выбор точек замера. При испытаниях многослойных панелей точки замера необходимо располагать на достаточном расстоянии от мест, создающих помехи для измерения вследствие припожения нагрузки. При многослойных панелях с тонкими внешними слоями предполагается наличие состояния мембранных напряжений, так что достаточно измерений на внешней стороне внешнего слоя. Если необходимо проверить влияние возможного выпучивания внешнего слоя, то электрические тензометры должны быть расположены на обеих сторонах внешнего слоя. Тензометр, устанавливаемый на внутренней стороне внешнего слоя, следовательно, необходимо прикреплять, включая электрокабель, уже при производстве панели.

Измерение перемещений. Перемещения можно измерить с помощью установленного на испытуемом образце стрелочного индикатора, показывающего их на цифровой шкале. Наиболее употребительными и удобными являются стрелочные индикаторы с соединительным штифтом. Если деформируемый или смещаемый испытуемый образец двигает соединительный штифт, то перемещения указываются на циферблате. Если из соображений надежности или из-за величины испытуемого образца необходимо находиться на значительном расстоянии от места измерения, так что прямое снятие показаний невозможно, то в этом случае используют электрические приборы с дистанционной индикацией, например индуктивный датчик перемещений. Кроме того, возможно также применение оптических измерительных методов из области геодезии, таких, как теодолит и нивелир. При измерениях прогибов многослойных панелей точка прикрепления измерительного устройства не должна находиться вблизи зон, поврежденных выпучиванием, так как результаты могут быть искажены вследствие местных вспучин. В случае многослойных балок измерение прогибов в нескольких точках должно происходить равномерно по ширине поперечного сечения, чтобы исключить побочные деформации, например кручение и т.п.

Способ снятия результатов измерений. При описании методов измерений уже были кратко упомянуты некоторые способы получения измерительных данных. Самый простой путь — это считывание показаний приборов и занесение измеренных данных в протокол испытаний. При электронном приеме результатов измерений с помощью самописца можно наносить данные в виде кривой. При этом возможно постоянное

слежение за ходом испытания. Здесь исключаются ошибки при считывании и записи. При электронном съеме результатов измерений можно также подключить электронный вычислительный прибор, печатающий нужные данные по определенной программе и таким образом оформляющий протокол испытаний.

9.2.3. Компенсация погрешностей результатов измерений. Все результаты измерений имеют неточности, которые возникают от несовершенства испытательного устройства, неточностей измерительных приборов и считывания показаний. Если необходимо обобщить результаты измерений относительно идеального строительного элемента, то в дополнение к этому прибавятся еще и отклонения испытываемых образцов от такого элемента. Эти отклонения могут быть как чисто геометрического характера (например, отклонения по толщине), так и в характере материала (например, диапазон рассеивания в G -модуле). Отсюда следует, что, как правило, следует производить не менее трех независимых измерений по возможности трех различных образцов. Число испытываемых образцов определяется их стоимостью прежде всего тогда, когда испытание может быть разрушающим, как при испытании предельной нагрузки, требуемой точностью и надежностью результатов испытаний, а также значением испытания, которое для разового строительного элемента необходимо оценивать иначе, чем для заключений относительно серийных строительных элементов или даже для подтверждения основополагающей теории. Из-за многочисленности точек зрения относительно числа испытываемых образцов обязательных правил не существует. По крайней мере при трех сопоставимых измерениях компенсация погрешностей может происходить посредством образования среднеарифметического; при пяти и более измерениях одинакового вида верхние и нижние крайние значения (выпадающие) могут быть исключены для образования среднего значения.

Приведем пример компенсации погрешностей из программы испытаний многослойных панелей, осуществленной отдалением производственного планирования фирмы "Хёш АГ" ("Hoesch AG"). Пример касается трех прямых многослойных балок со стальными внешними слоями толщиной 0,5 мм, средним слоем из пенополиуретана толщиной 50 мм, объемной массой 50 кг/м³, шириной 500 мм и расстоянием между опорами 3,8 м. Испытательная установка и вид нагрузки представлены на рис. 50. В середине пролета с помощью электротензометра в верхнем внешнем слое измерялось напряжение σ_o , в нижнем внешнем слое — напряжение σ_u и с помощью стрелочных индикаторов — прогиб w . Данные измерений в зависимости от величины нагрузки P приведены в табл. 9.1. Компенсация погрешностей для подсчета напряжений состоит из трех расчетных циклов, а в случае прогибов — из двух.

Компенсация между σ_o и σ_u .

Так как из соображений симметрии в каждом испытываемом образце величина напряжений в нижнем и верхнем внешних слоях должна быть одинаковой, то для каждого испытываемого образца получается среднее значение

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_o + |\sigma_u|). \quad (9.2)$$

Компенсация между испытываемыми образцами

Так как все три испытываемых образца одинакового вида, то под оди-

**Таблица 9.1. Данные измерений для трех прямых
многослойных балок**

Испытуемый образец	Усилия	Данные измерений		
	P , кгс	σ_s , кгс/см ²	σ_u , кгс/см ²	w , мм
1	73	-310	+324	15,2
	128	-546	+552	27,1
	184	-815	+801	38,5
	239	-1104	+1059	48,2
2	73	-346	+289	15,1
	128	-570	+489	25,5
	184	-794	+703	36,2
	239	-1059	+957	46,1
3	73	-350	+310	14,6
	128	-570	+499	25,2
	184	-798	+727	35,8
	239	-1059	+961	45,8

наковой нагрузкой они должны иметь также одинаковые напряжения внешних слоев и прогибы, поэтому для серии рассчитываются средние значения:

$$\sigma_M = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \sigma_{mj}; \quad w_M = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 w_{mj}. \quad (9.3)$$

Компенсация относительно закона линейности

Напряжения и прогибы линейно зависят от величины нагрузки P , поэтому пары значений (P, σ_M) и соответственно (P, w_M) , относящиеся к различным ступеням нагрузки, должны лежать соответственно на одной прямой. Но так как измеренные значения находятся в пределах известного диапазона разброса, то положение этой прямой определяется по методу минимумов суммы квадратичной погрешности. Если пары значений (P, σ_M) или (P, w_M) переименовать в (x, y) и обозначить k ($k = 1, 2, \dots, n$) — номер измерения при определенной ступени нагрузки, то в соответствии с уравнением прямой

$$y = mx + b \quad (9.4)$$

сумма квадратичной погрешности составит

$$\Phi = \sum_{k=1}^n [y_k - (mx_k + b)]^2. \quad (9.5)$$

В уравнении (9.5) y_k — измеренное значение, относящееся к x_k , а $mx_k + b$ — значение, относящееся к x_k на искомым прямых. Если Φ минимизировать относительно m и b , то со вспомогательными величинами:

$$A = \sum_{k=1}^n x_k; \quad B = \sum_{k=1}^n x_k^2; \quad C = \sum_{k=1}^n y_k; \quad D = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

получим следующие коэффициенты прямых:

$$m = \frac{AC - nD}{A^2 - nB}; \quad b = \frac{AD - BC}{A^2 - nB}, \quad (9.6)$$

где m показывает наклон прямой, а b — смещение нулевой точки.

Проведя три вида компенсации погрешностей для измеренных значений согласно табл. 9.1, получим значения, приведенные в табл. 9.2.

Таблица 9.2. Компенсация погрешностей измеренных значений согласно табл. 9.1

Испытуемый образец	Усилие	Средние значения		Улучшенные значения		
	P , кгс	σ_m , кгс/см ²	σ_N , кгс/см ²	w_N , мм	$\sigma_{улучш}$, кгс/см ²	$w_{улучш}$, мм
1	73	317	320	15,0	310	15,4
	128	549				
	184	808				
	239	1082				
2	73	318	538	26,3	546	25,9
	128	530	773	36,8	786	36,5
	184	749	1033	46,7	1022	47,0
	239	1008				
3	73	326				
	126	535				
	184	763				
	239	1010				

Уравнение (9.6) для измерений напряженного состояния дает $m = 4,285 \text{ см}^{-2}$, $b = 13,2 \text{ кгс/см}^2$, а для измерений деформаций $m = 0,1906 \text{ мм/кгс}$, $b = 1,46 \text{ мм}$. Теперь улучшенные значения $\sigma_{улучш}$ и $w_{улучш}$ могут быть противопоставлены значениям, рассчитанным по теории многослойных конструкций, и служить для ее подтверждения или корректировки.

Компенсация погрешностей при трапецеидальных многослойных балках осуществляется так же, как и при плоских. Некоторые результаты испытаний плоских и трапецеидальных многослойных балок под действием изгибающего момента и сравнение с теорией даны в пп. 9.6.2 и 9.6.3.

9.3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОК

9.3.1. Общие положения. Статические и динамические испытания различаются видом нагрузки. К динамическим нагрузкам относятся прежде всего:

подвижные нагрузки, возникающие, например, в конструкции мостов от транспортных средств;

ударные нагрузки, характеризующиеся высокими параметрами, но воздействующие на тело ограниченное время;

периодически изменяющиеся силы, имеющие следствием колебание тела. Далее речь пойдет исключительно о периодических силах и поперечных колебаниях многослойных балок. Для случаев опирания и введения нагрузок при виброиспытаниях многослойных балок имеют место те же самые точки зрения, что и при статических испытаниях, описанных в п. 9.2. Относительно вида колебаний при испытаниях различают свободные и вынужденные колебания. Цель виброиспытания многослойных балок:

определить упругие свойства материала в исследуемом образце, например, модуль сдвига среднего слоя многослойной балки;
проверить теоретически определенный характер колебаний;
определить предел выносливости строительного элемента при знакопеременной нагрузке. Для двух первых достаточно получить свободные колебания, в то время как предел выносливости при знакопеременной нагрузке многослойной балки надо измерять только по вынужденным колебаниям.

9.3.2. Свободные колебания многослойных балок. Свободные колебания многослойной балки достигаются искусственным отклонением от положения равновесия и освобождением испытуемой балки; это похоже на щипок натянутой струны. При испытаниях с представленным на рис. 50 видом опирания многослойной балки, которые служили подтверждением теории колебаний для многослойных балок и определению модуля сдвига материала среднего слоя, оказалось целесообразным испытуемую балку дополнительно нагружать в середине пролета грузами в форме стальных заготовок. При этом необходимо препятствовать приподниманию испытуемой балки с опор во время колебаний, а также снизить собственную частоту системы, что является преимуществом, поскольку медленный процесс колебаний удобнее и точнее можно измерить. Полученное таким образом колебание записывалось вибрографом. При виброколебаниях целесообразно воспринимать ход колебаний не механически через периодические изменения прогибов балки, а электрически через периодические изменения деформаций, измеряемые с помощью электротензометров.

9.3.3. Вынужденные колебания многослойных балок. Вынужденные колебания многослойной балки могут производиться с помощью двигателя с неуравновешенным шкивом, который издает периодически направленную нормалью к панели силу. Этот двигатель может ставиться и укрепляться непосредственно на многослойной балке. Если необходимо избежать дополнительного веса, который создает двигатель, то на многослойной балке монтируется только неуравновешенный шкив, а между двигателем, расположенным вне балки, и дисбалансом располагается гибкий вал. Число оборотов двигателя должно регулироваться плавно до наивысшего значения собственных колебаний системы, которое можно измерить (в большинстве случаев достаточно первая собственная частота). При достижении первой собственной частоты получаются большие амплитуды колебаний (резонанс), которые могут привести к разрушению испытуемого образца.

9.4. ИСПЫТАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ ТЕРМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКОЙ

9.4.1. Общие положения. Как уже отмечалось, благодаря хорошим теплоизоляционным свойствам многослойной панели между обоими внешними слоями могут возникать значительные разности температур. Они приводят или к очень большим деформациям панели, или, если возникновению этих деформаций препятствует опора, к слишком большим внутренним напряженным состояниям во внешних и среднем слоях. Практический интерес для конструкции (за исключением пожаров) представляет температурный диапазон от -30 до $+100^{\circ}\text{C}$. Как правило, поведение многослойного элемента в диапазоне температур

от +120 до +90°C дает достаточно объяснений о температуре обусловленных деформациях, так что в осуществленных фирмой "Хёш АГ" ("Hoesch AG") программах испытаний можно было отказаться от измерений при низких температурах (-30°C). Целью испытаний была также проверка теории многослойных конструкций.

9.4.2. Испытания статически определяемых многослойных панелей. Было выделено закрытое помещение, две противопожарные стены в котором представляли собой многослойные плоские панели, которые должны были испытываться (рис. 55). Сверху и снизу стены могли свободно поворачиваться. Боковое соединение с двумя другими ограничительными стенками из асбестоцементных плит позволяло осуществлять свободное скопление без трения во время температурной деформации. Температура воздуха во внутреннем пространстве с помощью воздушной горелки горячего воздуха поднималась до +90°C. Возникавшая при этом температура поверхности испытываемых образцов измерялась с внутренней и внешней стороны. Для этого на внешние слои наклеивались термометры сопротивления. Для того чтобы избежать возмущающего влияния проходящего мимо горячего воздуха, термометры были защищены специальным футляром. Отсчет температуры происходил с помощью измерительного прибора. Возникшее из-за разности температур перемещение испытываемых стен измерялось в середине пролета, т.е. на половине высоты, с помощью механических стрелочных индикаторов.

9.4.3. Испытания статически неопределимых многослойных панелей. В проведенной затем заводом строительных конструкций фирмы "Хёш" ("Hoesch Siegerlandwerke AG", ФРГ) серии опытов необходимо было проверить, как панель типа "Hoesch-isowand" ведет себя при одностороннем температурном воздействии. Панель располагалась по четырем пролетам в виде неразрезной балки, т.е. с трехкратным статически неопределимым опиранием. В частности, было проверено три варианта: четырехпролетное опирание многослойной панели с жестким закреплением на промежуточных опорах;

четырёхпролетное опирание многослойной панели с пружинным закреплением на промежуточных опорах; длина пружин в расслабленном состоянии составляла 70 мм, а их максимальное сжатие равнялось 30 мм;

четырёхпролетное опирание многослойной панели с жестким закреплением, но с отделением от заделки внутренним внешним слоем на промежуточных опорах. Все три вида опираний представлены на рис. 56. Так как при жестком креплении многослойных панелей на промежуточных опорах, по теории многослойных конструкций, поверх промежуточных опор возникают большие напряжения внешних слоев, то необходимо было проверить:

возникают ли и на практике большие напряжения внешних слоев при жестком закреплении;

возможно ли существенное сокращение напряжений размещением пружины между внутренней стороной "сэндвича" и крепежной гайкой;

действует ли при разделении внутреннего внешнего слоя крепление на промежуточных опорах (так, как это должно быть по теории) как шарнир, т.е. напряжение внешних слоев сокращается до нуля. Были проведены лишь испытания под предельной нагрузкой, т.е. односторонний нагрев расположенными вдоль четырехпролетной многослойной панели нагревательными элементами осуществлялся до тех пор, пока

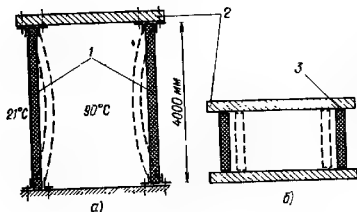


Рис. 55. Установка для температурных испытаний

а — вертикальный разрез;
б — горизонтальная проекция; 1 — ограничительная стена из асбестоцемента; 2 — свободное перемещение; 3 — испытуемые образцы многослойных панелей

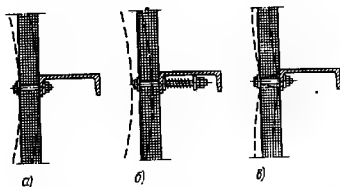


Рис. 56. Виды закреплений на промежуточных опорах
а — жесткое закрепление;
б — пружинное закрепление;
в — отделенный от заделки внутренний слой панели

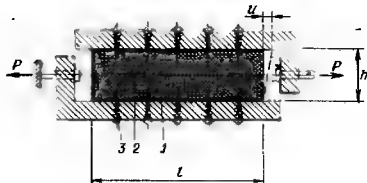
вследствие превышения предельного напряжения смятия в нагретом внешнем слое по промежуточным опорам не начинались волны смятия, остаточные выпучивания и отслаивания среднего слоя из пенополиуретана.

9.5. ИЗМЕРЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПОСТОЯННЫХ УПРУГОСТИ МАТЕРИАЛА СРЕДНЕГО СЛОЯ

9.5.1. Особенности твердых пенопластов. Для воплощения теории упругости в практику необходимо знание значений постоянных упругости используемых материалов, т.е. модулей упругости E , сдвига G и коэффициентов поперечной деформации ν . Для металлов эти значения известны. Для жестких пенопластов, которые часто используются в качестве среднего слоя многослойных панелей¹, напротив, данные относительно значений этих характеристик материала проблематичны. Они зависят от вида пластических масс, структуры ячеек жесткого поропласта, объемной массы, а при превышении зоны линейности — от величины нагрузки. В зависимости от структуры ячеек следует, что у многослойных панелей, средний слой которых состоит из пенополиуретана, вспененного в процессе производства "сэндвич", постоянные значения материала зависят также от метода вспенивания и геометрических характеристик многослойной строительной конструкции. Пеноматериал поэтому также не является изотропным. По этим причинам постоянные

¹ Обзор наиболее употребительных видов дает табл. 11.1.

Рис. 57. Испытание на сдвиг для измерения модуля сдвига
1 — внешний слой; 2 — средний слой из полиуретана; 3 — металлический винт



упругости не могут заимствоваться из таблиц с постоянными параметрами материалов, в от случая к случаю вновь должны определяться экспериментальным путем. Различают два метода: непосредственное измерение небольших испытуемых образцов из твердого пенопласта и косвенное измерение через прогибы или собственные колебания испытуемых многослойных балок.

9.5.2. Непосредственные измерения постоянных упругости. Модуль сдвига G среднего слоя. Описание измерения модуля сдвига G среднего слоя в плоскости x, z многослойной балки¹ ограничим рассмотрением сердечника из жесткого пенополиуретана из программы испытаний фирмы "Хёш АГ" ("Hoesch AG"). При других материалах сердечнике процесс измерения аналогичен. Преимущество имеют образцы многослойных панелей шириной $b = 120$ мм, длиной $l = 500$ м и высотой $h = 100$ мм (h — высота используемых плоских многослойных балок). Внешние слои вырезались вместе со средним и давали возможность укреплять испытуемый образец в зажимах разрывной машины металлическими винтами. Схема испытания показана на рис. 57. Срезающее усилие P непрерывно создавалось разрывной машиной. Подсоединенный самописец наносил диаграмму "усилие — деформация" (рис. 58). Она обнаруживает четко выраженную пропорциональную зону между усилием и деформацией, которая достигает примерно 60% разрушающей нагрузки ($P_p = 0,6 P_B$). Вследствие $\tau = \frac{P}{bl} = G\gamma$, $\gamma = \frac{u}{h}$ получаем модуль сдвига

$$G = \frac{h}{bl} \frac{P}{u}, \quad (9.7)$$

где отношение P/u в пределах зоны пропорциональности постоянно. Полученные значения G , а также предел прочности на разрыв $\tau_B = P_B/bl$ для различных объемных масс твердого пенополиуретана представлены в табл. 9.3. Разброс данных испытаний образцов был незначителен.

Модуль упругости E среднего слоя. Описание измерения модуля упругости E среднего слоя по оси z ограничим рассмотрением среднего слоя из твердого пенополиуретана. Оказалось, что преимущество имеют образцы многослойных панелей шириной и длиной $b = 100$ мм, высотой $h = 100$ мм (h — высота использованных плоских многослойных балок). Внешние слои многослойной панели снова вырезались вместе со

¹ Ось x совпадает с продольным направлением балки; ось z расположена вертикально к внешним слоям.

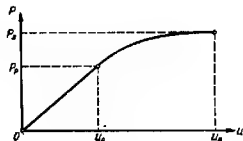


Рис. 58. Диаграмма "усилие — деформация" при испытании на одностороннее растяжение;
 P_p — предел пропорциональности;
 P_b — предел прочности

средним слоем и давали возможность при испытании на растяжение укреплять испытуемый образец на зажимах разрывной машины. При испытании на сжатие использовалась специальная испытательная машина. Схема испытаний показана на рис. 59.

Растягивающее или соответственно сжимающее усилие прилагалось непрерывно, и снова получалась диаграмма "усилие — деформация" согласно рис. 58. Вследствие

$$\sigma = \frac{P}{b^2} = E \epsilon, \quad \epsilon = \frac{u}{h}$$

получим модуль упругости

$$E = \frac{h}{b^2} \frac{P}{u}. \quad (9.8)$$

Полученные значения E_x и E_d , а также пределы прочности при растяжении или сжатии $\sigma_{дб} = P_{дб}/b^2$ и $\sigma_{сб} = P_{сб}/b^2$ при испытании на растяжение или соответственно на сжатие для различных объемных масс жесткого пенополиуретана даны в табл. 9.3. Разброс здесь был также незначителен.

Результаты и выводы. Собранные в табл. 9.3 значения постоянных упругости для жесткого пенополиуретана справедливы только для температур от 12 до 20°C и только для такой рецептуры пеноматериала и такого способа обработки, какие применялись в многослойных строительных конструкциях данной программы испытаний. Но в качестве ориентировочных значений они могут быть перенесены и на пенополиуретаны той же объемной массы, но изготовленные несколько иначе. Из табл. 9.3. видно:

E_x и E_d не совпадают, а отклоняются одно от другого на 20%, причем $E_x > E_d$. Так как отклонения невелики, то для расчета по теории упругости можно использовать среднее значение

$$E = \frac{1}{2}(E_x + E_d); \quad (9.9)$$

справедливое для изотропного материала отношение $E = 2(1 + \nu)G$ при $0 \leq \nu \leq 0.5$ через измеренные значения модулей частично не выполняется. Следовательно, полиуретан не является изотропным.

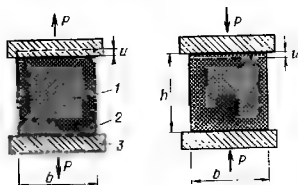


Рис. 59. Испытания на растяжение и сжатие для измерений модулей упругости E_x и E_d
 1 — средний слой; 2 — внешний слой;
 3 — клеевой слой

**Таблица 9.3. Значения постоянных упругости
многополиуретана**

Объемная масса среднего слоя, кгс/м ³	50	80	100
G , кгс/см ²	25	35	40
E_x , кгс/см ²	75	175	240
E_y , кгс/см ²	65	145	200
E_z , кгс/см ²	70	160	220
τ_{xy} , кгс/см ²	1,8	2,4	3,0
σ_{xy} , кгс/см ²	2,0	3,7	4,8
σ_{xz} , кгс/см ²	2,2	5,2	7,2

9.5.3. Косвенные измерения. Измерение прогиба. Согласно теории, существует зависимость между прогибом балки и модулем сдвига G среднего слоя. Если при испытании на изгиб использовать схему испытания согласно рис. 50, то для прогиба в середине пролета, по теории для плоских многослойных балок с тонкими внешними слоями, в соответствии с п. 2.1.3 получим отношение

$$w = w_M + w_G = \frac{23}{1296} \frac{Pl^3}{B_s} + \frac{1}{6} \frac{Pl}{A}. \quad (9.10)$$

После измерения w единственным неизвестным в уравнении (9.10) остается выражение $A = GF_x = Gab$. Решением относительно G получается искомый модуль сдвига среднего слоя под действием статической нагрузки.

Измерение собственной частоты колебаний. Согласно теории колебаний многослойных балок, существует также зависимость между первой собственной частотой многослойной балки и модулем сдвига среднего слоя. Если для вибрационных испытаний использовать систему согласно рис. 17 с плоскими тонкими внешними слоями и приложенными стальными заготовками в качестве единичного груза в середине пролета, то, согласно (2.176), следует, что

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{G_0 + \alpha G_1}} g, \quad (9.11)$$

где c и α , выражены посредством (2.174) и (2.177); G_1 — собственный вес балки; G_0 — вес стальной заготовки и $g = 981$ см/сек² — ускорение свободного падения. Величины c и α , неявно содержат через β , согласно (2.47), значение жесткости среднего слоя на сдвиг A . После измерения ω_1 единственным неизвестным в уравнении (9.11) остается выражение $A = GF_x = Gab$; решением относительно G получается искомый модуль сдвига среднего слоя под действием динамической нагрузки.

Результаты и выводы. Сравнение результатов испытаний показало, что при косвенных измерениях многослойных балок для определения постоянных упругости получаются значения на 20–50% выше, чем при непосредственных измерениях, так как внутри многослойной балки проявляется большая степень стесненной деформации, нежели в вырезанных образцах сердечников. Кроме того, при динамических испытаниях внутреннее затухание (амортизация) материала среднего слоя делается заметным. Оба фактора повышают жесткость, т.е. они повышают значения постоянных упругости.

9.6. РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОК С МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ ВНЕШНИМИ СЛОЯМИ И СРЕДНИМ СЛОЕМ ИЗ ЛЕНОПОЛИУРЕТАНА

9.6.1. Обзор программы испытаний. Об испытательном устройстве и распределении нагрузки в программе испытаний, проведенной планово-производственным отделением фирмы "Хёш АГ" ("Hoesch AG", ФРГ), уже не раз говорилось в предыдущих разделах. Теперь необходимо дать лишь краткий обзор объема программы и результатов испытаний.

Для осуществления программы имелось 66 плоских и 56 трапециевидных многослойных балок (рис. 60). Варьировались следующие параметры:

в случае плоских многослойных балок — материал внешних слоев (сталь и алюминий), толщина внешних слоев t (0,5, 1 и 1,5 мм у стальных внешних слоев и 0,7 мм у внешних слоев из алюминия), толщина среднего слоя h (50, 100 и 150 мм), расстояние между опорами l (1,8; 2,8 и 3,8 м) и объемная масса пенополиуретана γ_k (50 и 100 кгс/м³);

в случае трапециевидных "сэндвичей" — поперечное сечение профиля (типы I и II), толщина внешних слоев t (1 и 1,5 мм), толщина среднего слоя h (55 и 80 мм) и объемная масса пенополиуретана γ_k (50 и 80 кгс/м³). Расстояние между опорами составляло всегда 4,80 м.

На отдельных образцах были проведены испытания. В случае плоских многослойных балок измеряли напряжения прогибов, предельную нагрузку, проводили испытания на определение собственной частоты колебаний (вибропрочности), температурные испытания и испытания при длительной постоянной нагрузке (исследования ползучести). В случае трапециевидных "сэндвичей" измеряли напряжения прогибов и предельную нагрузку.

9.6.2. Измерения напряжений и прогибов. Испытательная конструкция представлена на рис. 50—53. Для каждой комбинации параметров проводились испытания трех балок. Напряжения и прогибы измерялись в середине пролета по нескольким ступеням нагрузки. Плоские многослойные балки имели по две, а трапециевидные многослойные балки — по четыре электротензометра (рис. 61). Для контроля поперечного распределения напряжений во внешних слоях отдельные испытываемые образцы имели соответственно большее число электротензометров, распределенных по ширине балки. После записи всех измеренных значений для всей программы испытаний была проведена компенсация погрешностей согласно п. 9.2.3. Полученные при этом значения были затем сопоставлены со значениями, рассчитанными по теории многослойных конструкций.

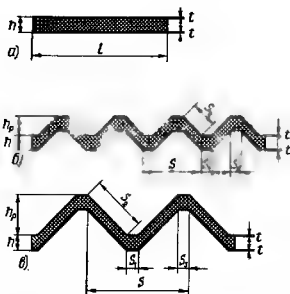
Для плоских многослойных балок измеренные напряжения находились в пределах 4—17%, а измеренные прогибы (после исключения выпадающих значений) — в пределах 3—25% ниже рассчитанных значений. Следовательно, действительное поведение многослойных балок гораздо более благоприятное, чем определенное теоретически. В качестве оснований для отклонений принимаются во внимание:

известное действие защемления на опорах вследствие трения вместо принятого шернирного опирания;

положительные отклонения от теоретических размеров толщины внешних слоев и среднего слоя;

частичное (если не большее) участие среднего слоя в восприятии

Рис. 60. Поперечные сечения испытывавшихся многослойных балок
 а — плоская многослойная балка; б — трапецидальная балка, тип 1; в — трапецидальная балка, II



изгибающего момента (особенно в случае многослойных балок с объемной массой сердечника 100 кгс/м³).

У трапецидальных многослойных балок измеренные напряжения были ниже рассчитанных значений на 0—110, в то время как прогибы при профиле I отклонялись от расчетных значений лишь в пределах от -3 до +7%, а при профиле II — от 15 до 18% и выше. Следовательно, при прогибах действительные параметры многослойных балок частично более неблагоприятные, чем определенные теоретически. В качестве оснований для отклонений принимаются во внимание:

частичное участие среднего слоя в восприятии изгибающего момента; неоднородность пеноматериала, прежде всего в боковых стойках профиля II типа, которые вследствие их небольшой толщины (39 мм) с трудом можно заполнить вспененным пенополиуретаном.

Отклонения напряжений во внешних слоях меньше, чем в плоских многослойных балках, поскольку при трапецидальных "сэндвичах" значительная часть изгибающего момента внешних слоев непосредственно воспринимается через собственный изгиб; только остаточная величина воспринимается конструкцией. Поэтому возникающие помехи относительно полных напряжений в процентном отношении не очень скрываются.

9.6.3. Измерения предельной нагрузки. В рассмотренных в п. 9.6.2 испытаниях на изгиб нагрузка P после окончания измерений напряжений и прогибов увеличивалась до тех пор, пока многослойная балка не ломалась. Все испытываемые образцы вследствие смятия внешних слоев разрушались именно в средней трети балки. Измеренные предельные нагрузки P_f сопоставлялись с критическими нагрузками, вызывающими смятие P_k , рассчитанными с помощью теоретического напряжения смятия σ_k .

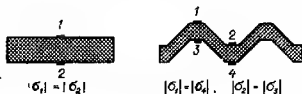


Рис. 61. Распределение электротензометров

В случае плоских многослойных балок с очень тонкими внешними слоями (0,5 мм при стальных и 0,7 мм при алюминиевых) теоретические нагрузки R_k , вызывающие смятие, после исключения выпадающего значения превысили измеренные предельные нагрузки R_r на 4–23%. Напротив, при утолщенных стальных внешних слоях (1 и 1,5 мм) получались меньшие предельные нагрузки R_r – 3–27%, причем 27% возникало при мягком среднем слое ($\gamma_k = 50 \text{ кгс/м}^3$) и 3% – при жестком среднем слое ($\gamma_k = 100 \text{ кгс/м}^3$). В качестве оснований для этих отклонений принимается во внимание ряд замечаний.

Если многослойная балка имеет тонкие внешние слои (0,5 или 0,7 мм), то, несмотря на образование волн смятия, возможно дальнейшее восприятие нагрузки, так как силы давления, действующие на средний слой сверху вниз, в зоне выпучивания внешних слоев меньше, чем при толстых внешних слоях. Отрыв внешних слоев от среднего возникает поэтому при повышенных сжимающих напряжениях первых.

Если многослойная балка имеет более толстые внешние слои (1 и 1,5 мм), то предельная нагрузка достигает величины, при которой передача нагрузки в местах ее приложения к балке, несмотря на эбонитовые прокладки (см. рис. 50), уже становится критической. Давление на поверхность среднего слоя в местах передачи нагрузки приближается к прочности на сжатие материала среднего слоя, так что его резервы для обеспечения устойчивости внешних слоев по отношению к смятию не велики.

Наличие недостатков теории (идеализированные условия) и дефектов испытываемых образцов (предварительное коробление во внешних слоях, усадочные раковины в пенополиуретане и т.д.) также явилось причиной отклонения измеренных предельных нагрузок от критических.

При трапецидальных многослойных балках теоретические нагрузки R_k , вызывающие смятие, после исключения выпадающего значения превышают измеренные предельные нагрузки на 2–60%. В большинстве случаев смятие возникало в верхней зоне боковых стоек; часто его можно было наблюдать до достижения предельной нагрузки. Причины такого поведения заключаются в том, что:

из-за узких зон выпучивания образование выпуклостей волн смятия сильно затрудняется, поэтому отрыв внешних слоев от среднего слоя происходит лишь при больших сжимающих напряжениях внешних слоев;

существуют недостатки теории, прежде всего предположение шарнирного опирания в зонах выпучивания боковых стоек и перекоордин на боковых кромках (см. рис. 43).

Работа трапецидальных многослойных балок при испытаниях под предельной нагрузкой подсказывает, что плоские "сэндвичи" нужно снабжать хотя бы небольшими гофрами. Это кстати и делается у большинства видов панелей "Hoesch-isowand".

9.6.4. Определение частот собственных колебаний. При рассмотренных в п. 9.3.2 испытаниях по определению частот собственных колебаний в общей сложности четырех многослойных балок при небольших амплитудах колебаний устанавливался приближенно синусоидальный ход колебаний. Измеренные собственные частоты были меньше, чем расчетные значения, на 8–11%. Это означает, что средний слой внутри плоской многослойной балки имеет большую жесткость на сдвиг, чем в выра-

занных образцах. Дальнейшие причины отклонений теории от практики перечислены в п. 9.6.2.

9.6.5. Температурные испытания. В рассмотренных в п. 9.4.2 испытаниях четырех различных статически определимых плоских многослойных панелей при одностороннем нагреве в середине пролета между расчетными и теоретическими данными, согласно формуле (2.12), возникли расхождения в пределах 12–17%. Измеренные деформации были, вероятно, меньше, так как в верхней и нижней частях опоры возникало трение и средний слой из-за иного коэффициента теплового расширения, чем у стели, частично препятствовал свободному температурному расширению нагретого внешнего слоя. Но в основном теория подтвердилась.

В рассмотренных в п. 9.4.3 испытаниях трижды статически неопределимых четырехпролетных панелей "Hoesch-isowand" наблюдалось следующее:

у панелей с жестким закреплением промежуточных опор уже при $\Delta T = 60^\circ\text{C}$ возникали остаточные потери устойчивости при продольном изгибе. Температурные напряжения, возникающие при перепаде температур, соответствуют примерно напряжениям, вызывающим смятия согласно (B.50), если туда в отличие от данных табл. 9.3 подставить уменьшенные постоянные значения упругости¹;

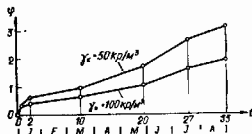
у панелей с упругими креплениями по промежуточным опорам остаточные потери устойчивости при продольном изгибе возникали лишь при $\Delta T = 87^\circ\text{C}$, так как многослойная панель вследствие сдавливания пружин частично могла "дать себе волю" и уменьшить напряжения внешних слоев;

у панелей с отделенным от крепления внутренним слоем по промежуточным опорам смятия не возникало совсем. Образовывалось лишь проходящее выпучивание в нагретом внешнем слое над каждой промежуточной опорой, которое после охлаждения многослойной панели снова полностью исчезало. Ожидаемые, согласно теории, результаты полностью подтверждены испытаниями. Они имеют большое значение для практического применения многослойных элементов в качестве стеновых панелей, где вследствие одностороннего нагрева солнечными лучами, особенно при темной наружной облицовке, могут возникать значительные температурные деформации.

9.6.6. Испытания длительной нагрузкой. В заключение по программе фирмы "Хёш АГ" ("Hoesch AG") проводились испытания длительной постоянной нагрузкой в общей сложности 16 плоских многослойных бапок с тонкими внешними слоями. Цель испытаний — исследовать характер ползучести работающего на сдвиг среднего слоя из жесткого пенополиуретана под действием длительных нагрузок. Применялся испытательный стенд, похожий на тот, который показан на рис. 50, но в качестве нагрузки использовались стальные прокатные заготовки. Величина длительной нагрузки P варьировалась в пределах 18–67% предельной нагрузки P_r , чтобы проверить, зависит ли и если да, то в какой мере, модуль ползучести φ от величины длительной нагрузки. С помо-

¹ Постоянные значения упругости E и G жесткого пенополиуретана уменьшаются с повышением температуры.

Рис. 62. Характеристика модуля ползучести



щью механических стрелочных индикаторов в течение 8 мес каждые две недели измерялись прогибы в середине пролета. После удаления длительной нагрузки спустя шесть недель еще раз было проведено наблюдение за тем, возникла ли и в каком объеме релаксация, т.е. медленное уменьшение деформаций ползучести.

Из 16 многослойных балок две на шестнадцатой неделе с начала испытаний сломались, одна из которых при $P/P_0 = 0,67$; остальные бапки постоянно увеличивали свои деформации ползучести. После удаления нагрузки прогиб мгновенно возвращался на упругую часть прогиба. В течение дальнейших шести недель при упругой доле прогиба, возникшей вследствие процесса ползучести, также наступала релаксация в пределах 11–18%.

Систематическое подведение итогов испытаний происходило посредством определения коэффициента ползучести. Зависящий от времени прогиб многослойной балки в середине пролета, на которую действуют нагрузки согласно рис. 50, с учетом (2.200) получится

$$w(\varphi) = w_{H_0} + (1 + \varphi) w_{Q_0} = \frac{23}{1296} \frac{Pl^3}{B_s} + \frac{1 + \varphi}{6} \frac{Pl}{A}, \quad (9.12)$$

где w_{H_0} и w_{Q_0} — часть изгиба и соответственно сдвига общего прогиба $w(\varphi=0) = w_{H_0} + w_{Q_0}$ к моменту времени $\varphi = 0$. При β согласно (2.47) и относительной величине

$$\rho = \frac{w_{Q_0}}{w_{H_0} + w_{Q_0}} = \frac{216\beta/23}{1 + 216\beta/23} \quad (9.13)$$

решением уравнения (9.12), согласно φ , получим модуль ползучести

$$\varphi = \frac{1}{\rho} \left[\frac{w(\varphi)}{w(\varphi=0)} - 1 \right], \quad (9.14)$$

где ρ — теоретическое значение, а $w(\varphi)$ и $w(\varphi=0)$ — измеренные. Следовательно, уравнение (9.14) делает возможным расчет модуля ползучести φ по измеренным значениям. Оценка результатов испытаний показала, что:

нет устойчивой зависимости модуля ползучести от величины нагрузки;

жесткий пенополиуретан объемной массой 100 кгс/м³ испытывает деформации ползучести примерно в 3/5 раза больше, чем жесткий пенополиуретан объемной массой 50 кгс/м³;

в холодное время года процесс ползучести происходит медленнее, чем в теплое время года.

Графическое изображение характеристики модуля ползучести φ , усредненного на основании всех результатов испытаний, показано на рис. 62.

9.7. ВЫВОДЫ НА ОСНОВЕ ИСПЫТАНИЙ О ПОВЕДЕНИИ ПОЛИМЕРНОГО МАТЕРИАЛА СРЕДНЕГО СЛОЯ МНОГОСЛОЙНОГО ОБРАЗЦА

Влияние свойств материала среднего слоя на несущую способность многослойных конструкций заслуживает особого внимания, так как в.

отношении этого материала еще нет достаточных данных и поскольку некоторые его свойства имеют существенные различия по сравнению с традиционными конструкционными материалами (металлами, деревом и бетоном). Если, например, у металлических листов известны определенные анизотропности поперек и вдоль направления прокатки или вертикально к плоскости стального листа, то анизотропности жестких пенопластов подвержены большому разбросу. Поэтому особенно важным является контролируемое качественное производство несущих строительных элементов. Это условие лучше всего выполняется полностью автоматизированными установками. Интересным является факт, что материал среднего слоя в целом блоке ведет себя более благоприятно, чем в небольших испытываемых образцах.

Ввиду того, что пенопласты подвержены деформациям ползучести, можно сделать вывод, что пенопласты должны подвергаться сжимающим или растягивающим напряжениям лишь непродолжительное время. К кратковременным напряжениям относятся, например, ветровые нагрузки на стены. У многослойных складчатых конструкций, согласно рис. 118, средний слой служит исключительно для подкрепления внешних слоев против смятия. Внешняя нагрузка воспринимается внешними слоями. Многослойные складчатые конструкции поэтому в состоянии воспринимать долговременные длительные нагрузки. У трапецеидальных многослойных конструкций или у сопоставимых многослойных строительных элементов, где кроме собственной жесткости профиля внешних слоев несущая способность всей конструкции также усиливает общую жесткость, хотя средний слой и работает на сдвиг, но не особенно усиленно. Поэтому они в состоянии воспринимать длительные нагрузки средней продолжительности, например снеговую нагрузку. При этом возникают известные перераспределения сдвигающих усилий и увеличение прогибов, но последние небольшие, кроме того, они снова исчезают после удаления нагрузки. В случае плоских многослойных панелей с тонкими внешними слоями не наблюдается влияния собственной жесткости внешних слоев. Поэтому средний слой полностью и длительно, т.е. без сокращения поперечной силы через перераспределение сдвигающих усилий, работает на сдвиг. Плоские многослойные конструкции поэтому должны испытывать лишь кратковременные нагрузки.

На основании изложенного можно достаточно точно оценить несущую способность рассмотренных в данной книге конструкций. Применение этих результатов к другим конструкциям требует дальнейшего экспериментального изучения.

10. АКУСТИЧЕСКИЕ, ТЕПЛОИЗОЛЯЦИОННЫЕ И ОГНЕЗАЩИТНЫЕ СВОЙСТВА

10.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Для развития новых форм конструкций (сюда относятся также и многослойные конструкции) важны знания физических законов во всех областях, а не только в области статики. То, как взаимодействуют области статики и техники звукоизоляции, показано в разделе, посвященном вопросам изоляции от воздушных шумов. Для полноты картины рассматриваются также и противопожарные мероприятия, связанные с проблемами статики и техники теплоизоляции. Решающее значение при этом имеет поведение материала при повышенных температурах.

10.2.1. Основные понятия. Одним из основных предназначений ограждающих помещений строительных элементов является обеспечение изоляции от шума, т.е. защиты помещения от проникающих снаружи звуков или, наоборот, предотвращение проникания наружу шума, возникшего в помещении. С точки зрения физики под шумом понимается звук. Звук можно охарактеризовать как наложение периодических незатухающих и затухающих колебаний частиц материала. В зависимости от среды, в которой распространяется звук, различают воздушный и ударный шум.

Воздушный шум, так же как и звук в других газах, распространяется с помощью продольных волн. Звуковое поле определяется двумя характерными величинами: звуковым давлением p и скоростью распространения звука ϕ . Звуковое давление — это периодически возникающее переменное давление, которое накладывается на атмосферное давление p_0 ; при этом постоянно предполагается, что $p \ll p_0$. Скорость распространения звука есть периодически возникающая переменная скорость частиц среды, которая совпадает с направлением распространения волн. Звуковое давление p является скаляром, а скорость распространения звука ϕ , — напротив, — вектором. Скорость распространения звука в газах при адиабатическом изменении состояния газа составляет

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}}, \quad (10.1)$$

где $\kappa = c_v/c_p$ — отношение удельных теплоемкостей газа при постоянном объеме и давлении, а ρ_0 — его плотность при давлении p_0 . Например, для воздуха в нормальном состоянии¹ $\rho_0 = 10332 \text{ кгс/м}^2$, $p_0 = 0,132 \text{ кгс/м}^2$, $\kappa = 1,405$ и, следовательно, $c_s = 332 \text{ м/с}$.

Ударный шум (звук, распространяющийся в твердых телах) в зависимости от возбуждения и формы удара может распространяться через материал в виде продольных волн, волн сдвига, поверхностных, изгибных и крутильных волн. Описание звукового поля сложнее, чем воздушного шума, поскольку вместо скалярного давления в теле возникают напряженные состояния, имеющие тензорный характер. Самый важный вид волн в строительной технике, где в большинстве случаев речь идет о плоских строительных элементах, — это изгибные волны. В случае многослойных панелей к ним прибавляются еще и волны сдвига. Скорость распространения чистой изгибной волны в однородной, жесткой на сдвиг, но не жесткой на изгиб панели составляет

$$c_b = \sqrt{\omega} \sqrt{\frac{B}{\mu}}, \quad (10.2)$$

а скорость распространения чистой волны сдвига в однородной, жесткой на изгиб, но не жесткой на сдвиг панели согласно (2.20) и (3.39) составляет

$$c_k = \sqrt{\frac{A}{\mu}}. \quad (10.3)$$

Здесь μ — масса панели на единицу поверхности. Скорость распростра-

¹ При 0°C и 760 мм.

нения звука в твердых телах возрастает с повышением жесткости (жесткости на изгиб B и соответственно жесткости на сдвиг A) и снижаются с увеличением массы. Величина c_s зависит, кроме того, от частоты звука ω . Это свойство, на основа которого высокочастотные собственные части изгибной волны распространяются быстрее (аналогично процессам в оптике), именуется дисперсией.

При прохождении звука через плоский строительный элемент происходит снижение уровня воздушного шума вследствие звукоизоляции и звукопоглощения. Звук о и з о л я ц и я происходит в результате отражения части возникающих на поверхности строительной панели звуковых волн, а з в у к о п о г л о щ е н и е — вследствие поглощения звука внутри панели за счет превращения звуковой энергии в тепловую. Но качество эффекта звукопоглощения панели зависит не только от строения материала этой панели, но и от диффузности звукового поля и частотного спектра и прежде всего от неизбежных погрешностей производства строительных работ. Стыки стеновых элементов, места их соединений с полом, потолки, а также дверные и оконные рамы образуют в большинстве случаев мостики для шума, которые пропускают звук сильнее, чем вся стена. Так же отрицательно ведут себя мостики воздушного шума в стенах хорошего изолирующего качества. Мостиками воздушного шума являются небольшие по размерам каналы передачи воздушного шума, такие, как трещины, замочные скважины и т.д. В противоположность учению о сопротивлении материалов, где отдельные ненадежные места строительных элементов в большинстве случаев исключаются посредством перераспределения напряжений, а номинальные параметры не оказывают влияния на всю конструкцию в целом, в акустике сказывается влияние плохих элементов конструкций. Для того чтобы охватить все вышеназванные параметры влияний, в технической акустике в большей степени, чем в статике и в учении о сопротивлении материалов, упор делается на испытания и статически обработанные измерения. Но для конструирования и разработки строительных элементов необходимо знание теоретических основ технической акустики. Для многослойных панелей, рассматриваемых здесь в первую очередь, прежде всего важны теория звукоизоляции от воздушного шума и теории поглощения ударного шума, поэтому в последующих пунктах ограничимся только данными областями.

10.2.2. Распространение звука в газах. При распространении звука в газах для звукового давления p при c , согласно уравнению (10.1), справедливо известное волновое уравнение

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} . \quad (10.4)$$

Между звуковым давлением p и скоростью распространения звука $\mathfrak{v}$ имеется соотношение

$$-\text{grad } p = \rho \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} . \quad (10.5)$$

В технической акустике прежде всего исследуются такие движения, скорость $\mathfrak{v}$ которых имеет потенциал Φ :

$$\mathfrak{v} = \text{grad } \Phi . \quad (10.6)$$

С учетом выражения (10.6) из уравнений (10.4) и (10.5) легко следует, что

$$\Delta \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (10.7)$$

Для одномерного случая, т.е. для прямых волн, например, в направлении z , волновое уравнения (10.7) имеет общее решение

$$\Phi = \Phi_1 \left(t - \frac{z}{c} \right) + \Phi_2 \left(t + \frac{z}{c} \right), \quad (10.8)$$

где Φ_1 и Φ_2 являются произвольными функциями, установленными только начальным распределением и граничными условиями. $\Phi_1(t - z/c)$ характеризует волну, распространяющуюся в положительном направлении z со скоростью c , а $\Phi_2(t + z/c)$ — волну, распространяющуюся в отрицательном направлении z со скоростью c .

Если ограничиться периодическими решениями, которые в технической акустике представляют преимущественный интерес, и применить для их представления комплексную запись, то из уравнения (10.8) при $i = \sqrt{-1}$ следует, что

$$\Phi = \hat{\Phi}_1 e^{i\omega(t-z/c)} + \hat{\Phi}_2 e^{i\omega(t+z/c)*}, \quad (10.9)$$

при этом, согласно известной формуле Эйлера,

$$e^{i\omega(t \pm z/c)} = \cos \omega \left(t \pm \frac{z}{c} \right) \pm i \sin \omega \left(t \pm \frac{z}{c} \right).$$

С помощью так называемого волнового числа

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (10.10)$$

аналогичного периоду $T = 2\pi/\omega$ (ω — частота звуковой волны, λ — длина звуковой волны), уравнение (10.9) можно также записать в следующей форме:

$$\Phi = \hat{\Phi}_1 e^{i(\omega t - kz)} + \hat{\Phi}_2 e^{i(\omega t + kz)}. \quad (10.11)$$

Следовательно, для звуковой волны ($\hat{\Phi}_2 = 0$), распространяющейся в положительном направлении z , из уравнений (10.6) и (10.7) с учетом уравнения (10.11) и $\{v\} = v_x = \dot{v}$ получается:

$$\left. \begin{aligned} v &= -ik \hat{\Phi}_1 e^{i(\omega t - kz)}; \\ p &= -i\omega \rho_0 \hat{\Phi}_1 e^{i(\omega t - kz)}. \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

Отсюда после выполнения деления следует

$$\frac{p}{v} = \rho_0 c = Z_L. \quad (10.13)$$

* Значок сверху $\hat{\Phi}_1$ и $\hat{\Phi}_2$ означает величину амплитуды гармонично-периодической функции.

Соответственно, для звуковой волны ($\hat{\Phi}_1 = 0$), распространяющейся в отрицательном направлении Z получается

$$\left. \begin{aligned} v &= +ik\hat{\Phi}_2 e^{i(\omega t + kz)}, \\ p &= -i\omega\rho_0\hat{\Phi}_2 e^{i(\omega t + kz)}, \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

откуда после выполнения деления получается

$$\frac{p}{v} = -\rho_0 c \equiv -Z_L, \quad (10.15)$$

где Z_L — волновое сопротивление газа для плоских звуковых волн; индекс L указывает на воздух, так как в строительной технике интерес представляют только звуковые волны в воздухе. Z_L показывает, какое необходимо звуковое давление $p = \pm Z_L v$, чтобы достичь определенной скорости распространения звука v .

Кроме плоских волн интерес представляют также и цилиндрические и шарообразные волны воздушного шума.

10.2.3. Теория изоляции от воздушного шума. Однородная стена под воздействием звукового давления. В акустическом смысле однородная стена представляет собой панель, у которой все точечные массы, располагающиеся в одной и той же плоскости, не меняют своего расстояния одна от другой, если стена вибрирует. В этом смысле однородными являются не только панели из однородного материала, но также и рассматриваемые многослойные панели, являющиеся несжимаемыми по своей толщине. Случай колебаний многослойной панели с легким сжимаемым сердечником будет рассмотрен позднее.

Если плоский фронт звуковой волны действует вертикально на стену, то вся стена производит периодические колебания; при этом вибрируют все элементы стены. Возникающая звуковая волна (давление p_a) частично отражается от стены (давление p_r), а частично пропускается сквозь нее (давление p_d). Под действием p_a, p_r и p_d (рис. 63) для стенового элемента $dm = \rho dx dy$, согласно закону Ньютона, получается

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_a + p_r - p_d. \quad (10.16)$$

Для звуковых давлений p_a, p_r и p_d в соответствии с п. 10.2.2 справедливо, что:

$$\left. \begin{aligned} p_a &= \hat{p}_a e^{i(\omega t - kz)}; \\ p_r &= \hat{p}_r e^{i(\omega t + kz)}; \\ p_d &= \hat{p}_d e^{i(\omega t - kz)}. \end{aligned} \right\} \quad (10.17)$$

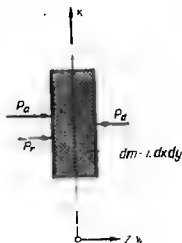
Если систему координат расположить таким образом, что у стен $Z = 0$, то из уравнений (10.17) для значений давлений p_a, p_r и p_d будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} p_a &= \hat{p}_a e^{i\omega t}; \\ p_r &= \hat{p}_r e^{i\omega t}; \\ p_d &= \hat{p}_d e^{i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

Для вынужденного смещения стены выбираем моночастотное выражение

$$w = \hat{w} e^{i\omega t}, \quad (10.19)$$

Рис. 83. Стеновой элемент при нормальном к плоскости стены действии звука



откуда следует, что:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= v_w - \hat{w} i \omega e^{i \omega t} = \hat{v}_w e^{i \omega t}; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \hat{v}_w i \omega e^{i \omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (10.20)$$

где v_w — скорость колебания стены. Подстановка уравнений (10.18) и (10.20) в уравнение (10.16) после исключения множителя $e^{i \omega t}$ и решения по v_w дает следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} v_w &= \frac{\hat{p}_a + \hat{p}_r - \hat{p}_d}{Z_w}; \\ Z_w &= i \omega \mu. \end{aligned} \right\} \quad (10.21)$$

Z_w означает полное сопротивление стены смещению. Эта в целом комплексная величина сопротивления показывает, какое общее звуковое давление $\hat{p} = \hat{p}_a + \hat{p}_r - \hat{p}_d = Z_w v_w$ необходимо для того, чтобы достичь определенной скорости v_w стены.

Расчет $\hat{v}_w$ из уравнения (10.21) пока невозможен, так как хотя и известно звуковое давление $\hat{p}_a$ соударяющейся волны, но неизвестны звуковые давления $\hat{p}_r$ и $\hat{p}_d$ отраженных и пропущенных звуковых волн. Для их определения необходимо использовать условия непрерывности для поверхности стены. Слева и справа от стены справедливы следующие условия:

$$\hat{v}_a + \hat{v}_r = \hat{v}_w; \quad \hat{v}_d = v_w. \quad (10.22)$$

На основании отношений, вытекающих из уравнений (10.13) и (10.15):

$$\hat{v}_a = \frac{\hat{p}_a}{Z_L}; \quad \hat{v}_r = -\frac{\hat{p}_r}{Z_L}; \quad \hat{v}_d = \frac{\hat{p}_d}{Z_d}; \quad (10.23)$$

из уравнений (10.22) получаем, что

$$\hat{p}_r = \hat{p}_a - Z_L v_w; \quad \hat{p}_d = Z_L v_w. \quad (10.24)$$

Подстановка уравнений (10.24) в уравнения (10.21) и решение согласно v_w дает

$$v_w = \frac{2}{Z_w + 2Z_L} \hat{p}_a. \quad (10.25)$$

Отношение звуковых давлений и соответственно скоростей распространения звука соударяющейся и пропущенной звуковых волн с учетом

уравнений (10.24) и (10.25) приводит к следующему¹:

$$\frac{P_a}{P_d} = \frac{v_a}{v_d} = 1 + \frac{Z_w}{2Z_c} . \quad (10.26)$$

В качестве критерия звукопоглощения и звукоизоляции стены определяем выражение

$$R = 10 \lg \frac{I_a}{I_d}$$

или, так как интенсивность звука² $I = p^2 \rho_0 c = v^2 \rho_0 c$ квадратично зависит от скорости распространения звука и соответственно от звукового давления,

$$R = 20 \lg \frac{v_a}{v_d} = 20 \lg \frac{P_a}{P_d} . \quad (10.27)$$

R измеряется в децибелах (дБ). Итак, из уравнения (10.27) с учетом уравнения (10.26) следует

$$R = 20 \lg \left| 1 + \frac{Z_w}{2Z_c} \right| = 20 \lg \left| 1 + i \frac{\omega \mu}{2\rho_0 c} \right| . \quad (10.28)$$

Следовательно, звукоизоляция стены тем лучше, чем больше масса стены. Если массу стены μ увеличить вдвое, то при $\omega \mu / 2\rho_0 c \gg 1$ (что в большинстве случаев имеет место) справедливо следующее:

$$R_1 \approx 20 \lg \frac{\omega \mu}{2\rho_0 c} , \quad R_2 \approx 20 \lg \frac{\omega \mu}{\rho_0 c} ,$$

следовательно,

$$\Delta R = R_2 - R_1 = 20 \lg 2 \approx 6 \text{ дБ} .$$

Таким образом, звукоизоляция стен увеличивается на 6 децибел. Такое же увеличение размера звукоизоляции получается и при удвоении частоты звука, т.е. при повышении высоты звука на октаву.

Однородная стена при действии на нее звукового давления под углом к поверхности. Если плоский фронт звуковой волны наклонно соударяется о стену (рис. 64), то звуковое давление на стену к определенному времени больше не является постоянным на всей поверхности стены, а различно в разных точках. Для P_a , P_r и P_d вдоль стены из уравнений (10.12) при $-i\omega \rho_0 \hat{\phi}_i = \hat{P}_a$ и соответственно $\hat{P}_r$, $\hat{P}_d$ и после замены Z на $x \sin \vartheta$ следует, что

$$P_{a,r,d} = \hat{P}_{a,r,d} e^{-ikx \sin \vartheta} e^{i\omega t} . \quad (10.29)$$

P_a , P_r и P_d зависят от x , причем направление x выражено вертикальной проекцией вектора скорости распространения звука на поверхность стены. Соответственно скорости воздушного шума c_x в направлении распространения звука вдоль стены устанавливается скорость движения

$$c^* = \frac{c_x}{\sin \vartheta} \quad (10.30)$$

¹ Значки над буквенными обозначениями можно в данном случае опустить, так как $\hat{P}_a/\hat{P}_d = P_a/P_d$ и $\hat{v}_a/\hat{v}_d = v_a/v_d$.

² Под этим понимается звуковая энергия, которая приходится в единицу времени на единицу поверхности, расположенной перпендикулярно направлению распространения звука.

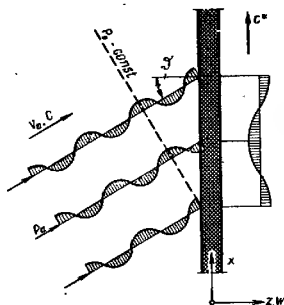


Рис. 64. Давление звука под углом

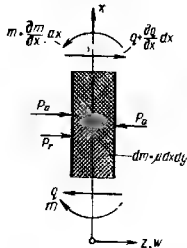


Рис. 65. Стеновой элемент при действии на него звука под углом

плоской звуковой волны. Следовательно, возбуждение стены вследствие $p = p_a + p_r - p_d$ происходит посредством распространяющихся в направлении x со скоростью c^* ударных волн.

Переменность p с x вызывает в стене (в противоположность перпендикулярному действию звука) изгибающие моменты и поперечные усилия, под действием которых она деформируется. Закон Ньютона для стенового элемента $dm = \mu dx dy$, согласно рис. 65, имеет здесь вид

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_a + p_r - p_d + \frac{\partial q}{\partial x}, \quad (10.31)$$

откуда с учетом известного из теории изгиба для жестких на сдвиг бапок отношения

$$q = -B \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (10.32)$$

непосредственно следует частное дифференциальное уравнение

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p_a + p_r - p_d. \quad (10.33)$$

При $B=0$ уравнение (10.33) переходит в уравнение (10.16).

С применением отношений (10.18) — (10.20) и (10.30) из уравнений (10.33) после краткого расчета получаем полное сопротивление смещению стены Z_w :

$$Z_w = i\omega\mu \left(1 - \frac{\omega^2 B \sin^2 \vartheta}{c^2 \mu} \right) = i\omega\mu \left(1 - \frac{\omega^2 B}{c^2 \mu} \right). \quad (10.34)$$

Условия непрерывности поверхности стены имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \hat{v}_a \cos \vartheta - \hat{v}_r \cos \vartheta &= \hat{v}_w; \\ \hat{v}_a \cos \vartheta &= \hat{v}_w, \end{aligned} \right\} \quad (10.35)$$

откуда с учетом уравнений (10.23) следует, что

$$\hat{p}_w = \frac{2}{Z_w + 2Z_L / \cos \vartheta} \hat{p}_a, \quad (10.36)$$

а

$$\frac{p_a}{p_d} = \frac{v_a}{v_d} = 1 + \frac{Z_w \cos \vartheta}{2Z_L}. \quad (10.37)$$

Коэффициент звукоизоляции получается с помощью уравнения (10.37) через (10.27):

$$R = 20 \lg \left| 1 + \frac{Z_w \cos \vartheta}{2Z_L} \right| = 20 \lg \left| 1 + i \frac{\omega \mu \cos \vartheta}{2\rho_0 c} \left(1 - \frac{\omega^2 B}{c^{*2} \mu} \right) \right|. \quad (10.38)$$

Особый случай $B = 0$ (податливая на изгиб стена при действии на нее звука под углом) дает следующее выражение:

$$R = 20 \lg \left| 1 + i \frac{\omega \mu \cos \vartheta}{2\rho_0 c} \right|. \quad (10.39)$$

Уравнение (10.39) при $\vartheta = 0$ (перпендикулярное стене действие звука) переходит в уже знакомое отношение (10.28).

Из уравнения (10.38) видно, что при наклонном действии на стену звука показатель звукоизоляции R стены зависит не только от ее массы μ , как это имеет место при перпендикулярном действии звука ($\vartheta = 0$), но и от ее жесткости на изгиб $B = Ed^3/12(1 - \nu^2)$. Показатель звукоизоляции R может быть равен нулю и именно в том случае, когда в уравнении (10.38) исчезает мнимая часть, т.е. когда $Z_w = 0$, откуда с учетом уравнений (10.30) и (10.2) следует

$$c^* = c_B. \quad (10.40)$$

Следовательно, $R = 0$, если скорость c^* волны воздушного шума вдоль стены и скорость c_B изгибной волны ударного шума в стене совпадают ("резонируют"). В данном случае говорят о резонансе. Соответствующая резонансная частота принимает вид

$$\omega_k = \frac{c^2}{\sin^2 \vartheta} \sqrt{\frac{\mu}{B}} = c^{*2} \sqrt{\frac{\mu}{B}}. \quad (10.41)$$

Уравнение (10.38) с помощью уравнения (10.41) можно переписать и тогда

$$R = 20 \lg \left| 1 + i \frac{\omega \mu \cos \vartheta}{2\rho_0 c} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2} \right) \right|. \quad (10.42)$$

Зависимость $R = R(f)$ для различных углов действия звука представлена в простом логарифмическом виде на рис. 66. Как видно, показатель звукоизоляции в соответствии с уравнением (10.42) в частотном диапазоне $0 < \omega < \sqrt{2} \omega_k$ меньше, а при $\omega > \sqrt{2} \omega_k$ больше, чем звукоизоляция, получаемая по "закону массы" в соответствии с уравнением (10.39). Следовательно, жесткость панели на изгиб при $\omega < \sqrt{2} \omega_k$ сказывается на звукоизоляции отрицательно, а при $\omega > \sqrt{2} \omega_k$ — положительно. Улучшение при $\omega > \sqrt{2} \omega_k$ в большинстве случаев незначительно.

Так как в строительной практике оцениваются только звуковые частоты между 100 и 3200 Гц, а звук может падать на стену под любым углом ϑ , то для всего диапазона звуковых частот f необходимо опре-

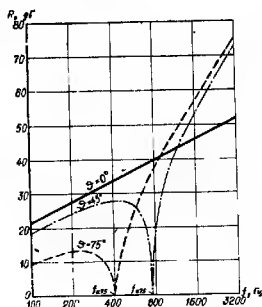


Рис. 66. Показатель звукоизоляции однородной стены при различных углах действия на него звука

делить из всех возникающих направлений падения среднюю звукоизоляцию R . Это делается с помощью вырезанного в ДИН 4109 звукового испытания; измеренные при этом кривые $R = R(f)$ характеризуют параметры звукоизоляции стены. В строительной практике наиболее употребительны три показателя звукоизоляции.

Показатель звукоизоляции $R = 20 \lg \frac{P_a}{P_d} + 10 \lg \frac{F}{A_0}$.

Он характеризует изоляцию строительного элемента от воздушного шума с поверхностью F при определенной частоте звука f , причем A_0 — "эквивалентная площадь поглощения" в пространстве за стеной (приемное пространство).

Показатель звукоизоляции R'_f , применяемый в строительстве.

Он характеризует изоляцию плоского строительного элемента от воздушного шума, включая влияние обычных в строительной практике побочных элементов при определенной звуковой частоте f .

Средний показатель звукоизоляции R'_m или средний показатель звукоизоляции R_m , применяемый в строительстве.

Это среднее значение, охватывающее весь строительно-акустический диапазон частот от 100 до 3200 Гц, нанесенных в полулогарифмическом масштабе кривых $R(f)$ и соответственно $R'(f)$.

Как показывает уравнение (10.42), звукоизоляция стены тем меньше, чем наклоннее падает звук. Но так как на практике вследствие ограниченного размера стен часть звуковой энергии из общей энергии, которая при очень большом угле падения звука переносится через стену, невелика, то в большинстве случаев при звуковых испытаниях не возникает угла падения звука величиной $\vartheta = 60^\circ, \dots, 90^\circ$. Поэтому ее можно не учитывать, если показатель звукоизоляции R , согласно уравнению (10.38), определяется вычислительным путем по углу падения. В общем при рассеянном падении звука показатель звукоизоляции получается на 6 дБ меньше, чем при вертикальном к плоскости стены направлении звука.

Несжимаемая многослойная панель при наклонном действии звука на стену. Несжимаемая многослойная панель с акустической точки зре-

ния также представляет собой однородную стену. Но в отличие от ранее рассмотренной она является мягкой на сдвиг панели. Если на нее нормально падает плоский фронт звуковой волны (см. рис. 64), то имеет место то же самое, что и в предыдущем подпункте. Единственное отличие состоит в том, что для поперечного усилия q в уравнении (10.31) вместо (10.32) необходимо применять отношение (3.16)

$$q = A_T - (B_u + B_s) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}. \quad (10.43)$$

Если предположить также, что внешние слои очень тонкие ($B_u, B_s \ll B_s$), то нельзя пренебречь компонентом внешних слоев согласно (10.43). Следовательно, различаются предположки для акустического и статического расчетов многослойной панели.

Если, согласно уравнению (10.43), подставить q в уравнение (10.31), то вместе с первым отношением (3.17), которое передает зависимости между w и γ , получим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (B_u + B_s) \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - A \frac{\partial \gamma}{\partial x} &= p_a + p_r - p_d; \\ B_s \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - A \gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.44)$$

Предельный случай $A = \infty$, т.е. $\gamma = 0$, после подстановки A_T согласно второму уравнению (10.44), в первое при B согласно (3.15) снова дает уже известное отношение (10.33).

Если в уравнения (10.44) для обозначения давлений ввести уравнения (10.29), а для w и γ выражения решения

$$w = \hat{w} e^{-ikx \sin \vartheta} e^{i\omega t}, \quad \gamma = \hat{\gamma} e^{-ikx \sin \vartheta} e^{i\omega t}, \quad (10.45)$$

то для $\hat{w}$ и $\hat{\gamma}$ получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} [-\mu \omega^2 + (B_u + B_s) k^4 \sin^4 \vartheta] \hat{w} + A i k \sin \vartheta \hat{\gamma} &= \hat{p}_a + \hat{p}_r - \hat{p}_d; \\ B_s i k^3 \sin^3 \vartheta \hat{w} + (B_s k^2 \sin^2 \vartheta + A) \hat{\gamma} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.46)$$

Рассчитав из этого $\hat{w}$ и введя затем $\hat{v}_n = i\omega \hat{w}$ согласно уравнению (10.20), а также введя сокращения:

$$\left. \begin{aligned} Z_\mu &= +i\omega\mu; \quad Z_s = -i \frac{B_s \omega^2 \sin^4 \vartheta}{c^4}; \\ Z_D &= -i \frac{(B_u + B_s) \omega^2 \sin^4 \vartheta}{c^4}; \quad Z_K = -i \frac{A \omega \sin^2 \vartheta}{c^2}, \end{aligned} \right\} \quad (10.47)$$

$\hat{v}_n$ можно записать после некоторого промежуточного расчета в форме (10.21) с учетом показателя сопротивления изоляции Z_n согласно уравнению

$$Z_n = Z_\mu + Z_D + \frac{Z_s Z_K}{Z_s + Z_K}. \quad (10.48)$$

Если провести аналогию с электротехникой, то Z_n получается из структурной схемы соединений, в которой Z_μ, Z_D, Z_s и Z_K имеют параллельно-последовательную схему подключения. Как вытекает из уравнений (10.47) и (10.48), Z_n является чисто мнимой величиной. В предельном

случае $A = \infty$, т.е. $Z_K = \infty$, $Z_w = Z_n + Z_D + Z_K$, вытекает из уравнения (10.48); следовательно, с учетом уравнений (10.47) и (3.15) снова получаем уравнение (10.34).

Условия непрерывности на поверхности стены выражены уравнением (10.35), отношение p_n/p_a соответствует уравнению (10.37), а R , как и в уравнении (10.38), выражается

$$R = 20 \lg \left| 1 + \frac{Z_w}{2Z_n} \cos \varphi \right|, \quad (10.49)$$

но при Z_n , соответствующем уравнению (10.48).

R в соответствии с уравнением (10.49) необходимо рассмотреть несколько подробнее. Для достаточно больших величин ($f = 100 - 3200$ Гц) в соответствии с уравнением (10.47) $Z_n \gg Z_K$. Таким образом, по уравнению (10.48) Z_w упрощается в $Z_w \approx Z_n + Z_D + Z_K$.

Таким образом, Z_w , следовательно, и R , согласно уравнению (10.49), независимы от жесткости многослойной конструкции на изгиб B_n . Для многослойных панелей с легким средним слоем (например, жесткого пенопласта) в большинстве случаев справедливо $A/\mu c^{*2} \gg 1$, а тем самым $Z_K \ll Z_n$, таким образом, выражение для Z_w более упрощается, принимая вид

$$Z_w \approx Z_n + Z_D.$$

При небольшой жесткости внешних слоев на изгиб $B_n + B_o$ и низкими звуковыми частотами можно также пренебречь и Z_D , по отношению к Z_n ; тогда получим "закон массы" в чистом виде. Для достаточно высоких звуковых частот это пренебрежение больше недопустимо, так как Z_n возрастает с ω только линейно, а Z_D — кубически. Следовательно, многослойная стена ведет себя в отношении своей звукоизоляции так, как будто бы она при полной массе μ имеет небольшую жесткость внешних слоев на изгиб $B_n + B_o$, тогда как относительно ее статической несущей способности действует очень большая по сравнению с $B_n + B_o$ жесткость многослойной конструкции на изгиб B_s . Так как жесткость на изгиб для достижения хорошей звукоизоляции должна быть как можно меньше, то, следовательно, многослойные панели ведут себя с акустической точки зрения более благоприятно, чем такие же по массе панели однородной конструкции, у которых не только с точки зрения статики, но и с точки зрения акустики действует полная изгибная жесткость B . Часто применявшаяся из акустических соображений двухслойная стена в форме тяжелой, жесткой на изгиб несущей оболочки (например, кирпичная стена) и легкой, мягкой на изгиб облицовочной оболочки (например, легкая строительная древесноволокнистая плита) может быть без потери звукоизоляционных качеств заменена тяжелой многослойной компактной "сэндвич"-панелью.

И в случае многослойной панели может возникать резонанс, а показатель звукоизоляции R равняться нулю. Это происходит именно тогда, когда

$$\left| 1 + \frac{Z_w}{2Z_n} \cos \varphi \right| = 1.$$

* Z_n , Z_D , Z_s и Z_K можно рассматривать как составляющие сопротивления стены под одиночным воздействием μ или соответственно $B_n + B_o$, B_s или A .

Отсюда следует (так как Z_n является чисто мнимым числом), что $Z_n = 0$. Из уравнения (10.48) после краткого преобразования получаем, что

$$\frac{Z_s}{Z_n} + \frac{Z_k}{Z_n} + \frac{Z_k}{Z_n} \left(\frac{Z_s}{Z_n} + \frac{Z_n}{Z_n} \right) + \frac{Z_s Z_n}{Z_n Z_n} = 0. \quad (10.50)$$

Если в уравнение (10.50) вместо сопротивления звукоизоляции ввести показатели скорости распространения звука:

$$c_s = \sqrt{\omega} \sqrt{\frac{B_s}{\mu}}; \quad c_n = \sqrt{\omega} \sqrt{\frac{B_n + B_o}{\mu}}; \quad c_k = \sqrt{\frac{A}{\mu}} \quad (10.51)$$

и c^* согласно уравнению (10.30)*, то из уравнения (10.50) следует

$$\left(\frac{c_s}{c^*} \right)^4 + \left(\frac{c_k}{c^*} \right)^2 - \left(\frac{c_k}{c^*} \right)^2 \left[\left(\frac{c_s}{c^*} \right)^4 + \left(\frac{c_n}{c^*} \right)^4 \right] - \left(\frac{c_s}{c^*} \right)^4 \left(\frac{c_n}{c^*} \right)^4 = 0. \quad (10.52)$$

Умножив уравнение (10.52) на c^{*4}/c_s^4 , получим

$$F_1 c^{*4} + c^{*4} - F_2 c^{*2} - F_3 = 0, \quad (10.53)$$

где при B , согласно уравнению (3.15):

$$F_1 = \frac{A}{B_s \omega^2}; \quad F_2 = \frac{A}{\mu} \frac{B}{B_s}; \quad F_3 = \frac{(B_n + B_o) \omega^2}{\mu}. \quad (10.54)$$

Уравнение (10.53) является трансцендентным уравнением, из которого при заданной звуковой частоте ω можно определить или скорость звуковой волны $c^* = c_k / \sin \varphi$, при которой возникает резонанс, или при заданной скорости звуковой волны c^* рассчитать резонансную частоту звука ω_k . Теперь в соответствии с уравнением (10.53) необходимо рассмотреть действие $c^* = f(\omega)$.

Небольшие значения ω . В этом случае второй и четвертый члены в уравнении (10.53) небольшие по сравнению с первым и третьим и поэтому ими можно пренебречь. Таким образом, получаем

$$c^* \approx \sqrt{c_s^2 + c_n^2} = \sqrt{\omega} \sqrt{\frac{B}{\mu}} \quad (10.55)$$

При очень тонких внешних слоях ($B_n + B_o \ll B_s$)

$$c^* \approx c_s = \sqrt{\omega} \sqrt{\frac{B_s}{\mu}}. \quad (10.55a)$$

Большие значения ω . В этом случае первый и третий члены в уравнении (10.53) небольшие по сравнению со вторым и четвертым и поэтому ими можно пренебречь. Отсюда получаем

$$c^* \approx c_n = \sqrt{\omega} \sqrt{\frac{B_n + B_o}{\mu}}. \quad (10.56)$$

Средний частотный диапазон. В этом случае $c_n \ll c_k \ll c_s$, так что первый и четвертый члены меньше по сравнению со вторым и третьим и поэтому ими можно пренебречь; получаем

* c_s, c_n и c_k могут рассматриваться как скорости распространения звука в стене при одиночном воздействии B_s и μ или $B_n + B_o$ и μ или A и μ .

$$c^* \approx c_K \sqrt{1 + \frac{c_s^2}{c_K^2}} = \sqrt{\frac{A}{\mu}} \frac{B}{B_s} \quad (10.57)$$

При очень тонких внешних слоях ($B_u + B_o \ll B_s$)

$$c^* \approx c_K \sqrt{\frac{A}{\mu}} \quad (10.57a)$$

Если $c^* = f(\omega)$ для особого случая тонких внешних слоев ($B_u + B_o \ll B_s$) представить графически в двойном логарифмическом масштабе, то получим форму кривой, представленной на рис. 67. Прямые $c^* = c_s(\omega)$ соответственно $c^* = c_D(\omega)$ являются асимптотами кривой $c^* = f(\omega)$ для очень маленьких или очень больших значений ω , в то время как прямая $c^* = c_K = \text{const}$ приближается к виду кривых в среднем частотном диапазоне. Предельные частоты ω_1 и ω_2 , которые, согласно уравнениям (10.55a), (10.56) и (10.57a), отделяют одну от другой три частотных диапазона, получаются из равенств: $c_s = c_K$ и $c_D = c_K$ и имеют вид:

$$\omega_1 = \frac{A}{\sqrt{\mu} B_s}; \quad \omega_2 = \frac{A}{\sqrt{\mu} (B_u + B_o)} \quad (10.58)$$

Значения c_s^* и c_D^* , относящиеся к ω_1 и соответственно ω_2 , получаем подстановкой уравнения (10.58) в уравнение (10.53) и пренебрежением четвертым и соответственно первым членами в уравнении (10.53):

$$c_s^* = 0,786 c_K; \quad c_D^* = 1,272 c_K \quad (10.59)$$

Теперь необходимо рассмотреть некоторые предельные случаи.

$A = \infty$. Уравнение (10.53) непосредственно дает c^* в соответствии с уравнением (10.55) для всего частотного диапазона. На рис. 67 справедлива только левая наклонная прямая $c^* = c_s(\omega)$.

$A = 0$. Уравнение (10.53) непосредственно дает c^* в соответствии с уравнением (10.56) для всего частотного диапазона. На рис. 67 справедлива, следовательно, только правая наклонная прямая $c^* = c_D(\omega)$.

$B_u = B_o = 0$ и не слишком малая ω . Уравнение (10.53) непосредственно дает c^* согласно уравнению (10.57a) для среднего и верхнего частотных диапазонов. На рис. 67 справедлива, следовательно, горизонтальная прямая $c^* = c_K$.

На основании рис. 67 относительно звукоизоляции многослойной панели можно сделать некоторые выводы. Все отмеченные на кривой $c^* = f(\omega)$ пары значений (ω, c^*) представляют собой резонансный случай. Если они действительно расположены достаточно далеко от кривой $c^* = f(\omega)$, то звукоизоляция многослойной панели хорошая. Чтобы в пределах диапазона частот воздушного шума достичь хорошей звукоизоляции, при выборе размеров многослойной панели необходимо учитывать ряд условий.

Скорость сдвигающих волн c_K должна быть определенно меньше, чем скорость c^* воздушного шума для $\vartheta = 90^\circ$ (падение звука перпендикулярно стене), т.е. $c^* = c_L = 340$ м/с, так как необходимо, чтобы

$$c_K \leq \frac{2}{3} c_L; \quad \text{соответственно} \quad c_L \geq \frac{3}{2} c_K.$$

Резонанс возникает при частоте лишь немного выше критической частоты ω_2 согласно уравнению (10.58).

Прямая $c^* = c_D(\omega)$ может достигать значения c_L лишь выше строительно-акустического частотного диапазона ($f = 100-3200$ Гц).

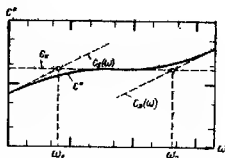
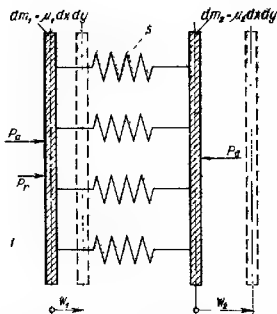


Рис. 67. Скорость распространения звука в многослойной панели с тонкими слоями в случае резонанса. Двойной логарифмический масштаб

Рис. 68. Колебания многослойной панели



В результате соблюдения этих условий стена ведет себя относительно резонанса таким образом, как если бы она при полной массе μ имела бы очень небольшую жесткость во внешних слоях на изгиб $B_k + B_o$, мерилем спускается прямая $c_D(\omega)$ на рис. 67.

Сжимаемая многослойная панель при нормальном к плоскости направлении звука. Сжимаемая многослойная панель, состоящая из двух внешних и легкого среднего слоев, с точки зрения акустики является двухслойной стеной. Внешние слои могут колебаться, причем средний слой действует как пружинная система. Для упрощения рассматривается только звукоизоляция при нормальном к плоскости стены направлении плоского фронта звуковых волн. При наклонно падающем звуке расчет был бы более сложным, так как при этом накладываются и взаимно влияют одно на другое колебания по толщине из-за сжимаемости среднего слоя, изгибные волны — из-за мягкости внешних слоев на изгиб и сдвиговые волны — из-за податливости среднего слоя на сдвиг. Поэтому уже в исходных дифференциальных уравнениях в расчет принимаются все эти связанные одна с другой величины.

При движении звука нормально к плоскости стены все точки внешнего слоя колеблются синхронно. Поэтому, согласно рис. 68, из многослойной панели можно выделить один элемент. При этом в местах приложения нагрузок не возникает сдвигающих усилий m и q (аналогично рис. 63, но иначе, чем на рис. 65). Под действием p_a , p_r и p_d для обоих свободно расположенных стеновых элементов $dm_1 = \mu_1 dx dy$ и $dm_2 = \mu_2 dx dy$ можно записать следующее выражение:

$$\mu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = p_a + p_r + F; \quad \mu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = -p_d - F, \quad (10.60)$$

где F — упругость, означающая растягивающее усилие на единицу поверхности. При динамической жесткости

$$s = \frac{E_{\text{дин}}}{h}, \quad (10.61)$$

где $E_{\text{дин}}$ — модуль упругости среднего слоя при динамической нагрузке, h — толщина среднего слоя,

$$F = s(\omega_2 - \omega_1). \quad (10.62)$$

Подстановка уравнения (10.62) в (10.60) дает дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} + s\omega_1 - s\omega_2 &= p_a + p_r; \\ \mu_2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2} - s\omega_1 + s\omega_2 &= -p_d. \end{aligned} \right\} \quad (10.63)$$

Прежде всего необходимо рассчитать собственную частоту данной системы. Если в однородные дифференциальные уравнения, относящиеся к уравнению (10.63), ввести выражения

$$\omega_1 = \hat{\omega}_1 e^{i\omega t}, \quad \omega_2 = \hat{\omega}_2 e^{i\omega t} \quad (10.64)$$

и произвести в $e^{i\omega t}$ приравнивание коэффициентов, то для $\hat{\omega}_1$ и $\hat{\omega}_2$ получим два уравнения:

$$(s - \mu_1 \omega^2) \hat{\omega}_1 - s \hat{\omega}_2 = 0; \quad -s \hat{\omega}_1 + (s - \mu_2 \omega^2) \hat{\omega}_2 = 0. \quad (10.65)$$

Приравниванием к нулю определителя коэффициентов непосредственно получается собственная частота колебаний

$$\omega_D = \sqrt{\frac{s}{\mu_1} + \frac{s}{\mu_2}}. \quad (10.66)$$

Если из уравнения (10.66) вывести со взаимовязанными размерностями формулу, в которую необходимо подставить массы μ_1 и μ_2 внешних слоев на единицу площади в кг/м² и динамическую жесткость s в кгс/см³, то получим

$$f_D \approx 500 \sqrt{\frac{s}{\mu_1} + \frac{s}{\mu_2}} \quad [\text{Гц}]. \quad (10.67)$$

Данная формула содержится также и в ДИН 4109. Приближенно можно учесть также влияние массы среднего слоя μ_K на f_D . Если, например, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_D$, то в уравнении (10.67) необходимо увеличить на значение $1/3 \mu_K/2$ только μ_D : $\bar{\mu}_D = \mu_D + \mu_K/6$.

Решение неоднородных дифференциальных уравнений (10.63) осуществляется применением выражений (10.18) для p_a, p_r, p_d и (10.64) для ω_1, ω_2 . Если аналогично уравнению (10.20) вместо $\hat{\omega}_1$ и $\hat{\omega}_2$ ввести $\hat{v}_1$ и $\hat{v}_2$ посредством равенств

$$\hat{v}_1 = i\omega \hat{\omega}_1, \quad \hat{v}_2 = i\omega \hat{\omega}_2 \quad (10.68)$$

и подставить их в уравнение (10.63), то получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (i\omega \mu_1 + \frac{s}{i\omega}) \hat{v}_1 - \frac{s}{i\omega} \hat{v}_2 &= \hat{p}_a + \hat{p}_r; \\ -\frac{s}{i\omega} \hat{v}_1 + (i\omega \mu_2 + \frac{s}{i\omega}) \hat{v}_2 &= -\hat{p}_d. \end{aligned} \right\} \quad (10.69)$$

¹ Множитель равен 1/2, так как для $\mu_1 = \mu_2 = \mu_D$ в середине панели имеется неподвижная точка и каждому внешнему слою может быть предоставлена соответственно половина среднего слоя. Относительно множителя 1/3 см. п. 2.4.2.

Условия непрерывности обеих поверхностей стены имеют вид:

$$\hat{u}_a + \hat{v}_a = \hat{u}_i; \quad \hat{u}_a = \hat{u}_2. \quad (10.70)$$

С учетом уравнения (10.23) для выражения звукового давления получим:

$$\hat{p}_r = \hat{p}_a - Z_1 \hat{u}_1; \quad p_a = Z_1 \hat{u}_2. \quad (10.71)$$

Уравнения (10.71) подставляются в (10.69) и упорядочиваются по факторам $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2$. Введя туда выражения:

$$Z_0 = i \frac{s}{\omega}; \quad Z_1 = i \mu_1 \omega; \quad Z_2 = i \mu_2 \omega, \quad (10.72)$$

решив уравнения относительно $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2$, подставив $\hat{u}_2$ в $\hat{p}_a$ согласно уравнению (10.71) и образовав $P=20$ согласно уравнению (10.27), после расчета получим

$$R = 20 \lg \left| \frac{(Z_1 - Z_0 + Z_1)(Z_2 - Z_0 + Z_1 - Z_0^2)}{-2Z_0 Z_1} \right|$$

и после дальнейшего преобразования

$$R = 20 \lg \left| 1 + \frac{Z_w}{2Z_1} \right|, \quad (10.73)$$

где

$$Z_w = Z_1 + Z_2 - \frac{(Z_1 + Z_1)(Z_2 + Z_1)}{Z_0}. \quad (10.74)$$

R снова можно представить в форме (10.28) или (10.38), или (10.49) (оба последних отношения для $\varphi = 0^\circ$). Показатель полного сопротивления Z_w в соответствии с уравнением (10.74) является комплексной величиной. Абсолютная величина $1 + Z_w/2Z_1$ с помощью безразмерных величин:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\mu_1 \omega_i^2}{2s}; \quad \beta = \frac{\mu_2 \omega^2}{2s}; \quad \gamma = \frac{Z_1 \omega}{2s}; \\ p &= \alpha + \beta - 1; \quad q = \gamma + \frac{\alpha + \beta - 2\alpha\beta}{2\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (10.75)$$

имеет вид

$$1 + \frac{Z_w}{2Z_1} = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad (10.76)$$

с помощью которого в соответствии с уравнением (10.73) можно легко рассчитать R .

Предельные случаи и приближения

А. Несжимаемая стена ($s = \infty, Z_0 = \infty$), Уравнение (10.74) принимает вид

$$Z_w = Z_1 + Z_2 = i\omega(\mu_1 + \mu_2) = Z_R, \quad (10.77)$$

т.е. известный "закон массы" согласно уравнению (10.28).

Б. У внешних слоев отсутствует масса ($\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, Z_1 = 0$ и $Z_2 = 0$). Уравнение (10.74) принимает вид

$$Z_w = -\frac{Z_1^2}{Z_0} = i \frac{\omega Z_1^2}{s}. \quad (10.78)$$

Следовательно, даже без массы внешних слоев (например, тонкие пленки) многослойная стена имеет незначительную звукоизоляцию.

В. Приближенная формула: в строительно-акустическом частотном диапазоне постоянно справедливым является $Z_L \ll |Z_1|$ и $Z_L \ll |Z_2|$. Поэтому неопределенный комплексный показатель полного сопротивления, согласно уравнению (10.74), можно упростить в чисто мнимое выражение

$$Z_w \approx Z_1 + Z_2 - \frac{Z_1 Z_2}{Z_0},$$

откуда с учетом уравнения (10.72) следует, что

$$Z_w \approx Z_M \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_D^2} \right), \quad (10.79)$$

при значениях Z_M согласно уравнению (10.21) или (10.77) и ω_D согласно уравнению (10.66). Если необходимо учесть влияние небольшой массы μ_K среднего слоя, то с хорошим приближением можно действовать таким образом, что в Z_M учитывается полное значение $\mu_K (\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_K)$, а при расчете $\omega_D = 2\pi f_D$ согласно уравнению (10.67) только определенная часть от μ_K , которая в случае $\mu_1 = \mu_2 = \mu_D$ составляет $1/6 (\mu_D = \mu_D + \mu_K/6)$. Уравнение (10.79) показывает, что Z_w , а следовательно, и звукоизоляция R при резонансе колебаний по толщине ($f = f_D$) имеет глубокий провал. Характер показателя звукоизоляции $R = R(f)$ сжимаемой многослойной панели в простом логарифмическом представлении дан на рис. 69.

10.2.4. Применение теории изоляции от воздушного шума. Рассмотрим некоторые многослойные панели стены с однородным строением. Проведем сопоставление расчетов и результатов измерений.

Оконное стекло. Для оконного стекла толщиной 12 мм при вертикальном угле падения звука действует "закон массы" согласно уравнению (10.28). При $\mu g = 30$ кгс/м² и $\rho_0 c = 42$ кгс/м³ (15°C) получаем для $f = 100$ Гц: $R_{100} = 27$ дБ; для $f = 3200$ Гц: $R_{3200} = 57$ дБ. Следовательно, показатель звукоизоляции составляет

$$R_m = \frac{1}{2} (R_{100} + R_{3200}) = 42 \text{ дБ.}$$

При наклонном действии звука ($\vartheta \neq 0^\circ$) R уменьшается в соответствии с формулой (10.38). Теоретическое и экспериментальные значения показателя звукоизоляции R в зависимости от звуковой частоты f представлены в упрощенно логарифмическом масштабе на рис. 70.

Кривая 3 для $\vartheta = 75^\circ$ показывает провал R при звуковой частоте примерно 1250 Гц. Расчетная резонансная частота, согласно уравнению (10.41), для $\vartheta = 75^\circ$ при $E = 700\,000$ кгс/см² и $c = 340$ м/с (при 15°C) для $f_K = 1086$ Гц. Следовательно, теория и эксперимент приемлемо совпадают. Особенно заметно снижающее звукоизоляцию влияние жесткости на изгиб при увеличении частоты, граничащей с резонансной.

Газобетонная стена. Для газобетонной стены толщиной 75 мм при вертикальном угле падения звука также действует "закон массы". На рис. 71 представлена характеристика показателя звукоизоляции R в зависимости от звуковой частоты f . Резонансная частота для $\vartheta = 90^\circ$ получается из уравнения (10.41) при $E = 20\,000$ кгс/см² и $c = 340$ м/с и равна $f_K = 495$ Гц; ее обозначают также как резонансную предельную частоту f_e , так как ниже f_e при угле падения звука $\vartheta = 0$ возникает резонанс.

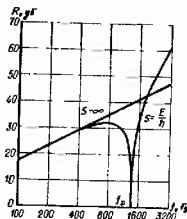


Рис. 69. Показатель звукоизоляции сжимаемой многослойной панели при нормальном к плоскости стены действии

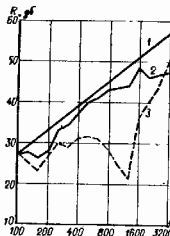


Рис. 70. Зависимости показателя звукоизоляции оконного стекла R от звуковой частоты f
1 — теоретическая кривая для $v = 0^\circ$ ("закон массы") при $R_m = 42$ дБ; 2 — экспериментальная кривая для $v = 0^\circ$ при $R_m = 38$ дБ; 3 — экспериментальная кривая для $v = 75^\circ$ при $R_m = 32$ дБ

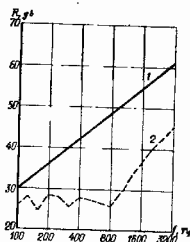


Рис. 71. Зависимости показателя звукоизоляции газобетонной стены R от звуковой частоты f
1 — теоретическая кривая для $v = 0^\circ$ ("закон массы"), $M_d = 50$ кгс/м² и $\rho_0 c = 42$ кгс/м³; 2 — экспериментальная кривая при испытании с широким спектром углов действия звука ($v = 0-80^\circ$)

Если из уравнения (10.41) для несжимаемых однородных стен вывести формулу, в которой толщина стены E выражается в см, плотность ρ в кг/м³, а модуль упругости E в кгс/см², то, взяв за основу скорость воздушного шума 340 м/с, получаем значение резонансной предельной частоты

$$f_c \approx \frac{20000}{\alpha} \sqrt{\frac{\rho}{E}} [\Gamma_4]. \quad (10.80)$$

В этой формуле для E необходимо подставить динамический модуль упругости $E_{дин}$. Он определяется по ДИН 53426 и для многих материалов (прежде всего для полимерных) несколько больше, чем статический модуль E .

Как показывает рис. 71, различие между кривыми 1 и 2 значительное. Легкие и одновременно жесткие строительные материалы, такие, как газобетон, оказываются, следовательно, непригодными для достижения высокой степени звукоизоляции. Резонансная предельная частота у них находится в строительно-акустическом диапазоне звуковой частоты, так что при диффузном падении звука узкие резонансные минимумы кривых $R=R(f)$, относящиеся к отдельным углам действия звука $v=0, 10, \dots, 80^\circ$, сливаются через усреднение по всему спектру углов действия звука в широкую гамму.

Многослойные панели. Рассмотрим три многослойные панели типа "Хёш-изованд" фирмы "Хёш" ("Hoesch") (см. рис. 110 вверху) с оцинкованными стальными внешними слоями ($E_D = 2,1 \cdot 10^6$ кгс/см²) и средним слоем из твердого пенополиуретана объемной массой 50 кгс/см³ ($G_K = 25$ кгс/см², $E_{дин} = 80$ кгс/см²) и сопоставим некоторые результа-

ты измерений. В табл. 10.1 представлены значения поперечных сечений; B_1 и B_2 рассчитаны по уравнениям (2.17), s — по (10.61), B_3 — по (2.21).

Таблица 10.1. Значения поперечных сечений многослойных панелей

Элемент	Величина	Стена 1*	Стена 2*	Стена 3**
Внешние слои	t , мм	0,5	0,5	0,5
	B_1 , кгс/м	0,219	0,219	0,219
	B_2 , кгс/м	0,219	0,219	2,3
	μ_d , кгс/м ²	4,4	4,4	4,4
	μ_g , кгс/м ²	4,4	4,4	4,4
Средний слой	h , мм	34	59	59
	A , МПа/м	8,75	15,0	15,0
	s , кгс/см ³	23,5	13,6	11,9
	μ_d , кгс/м ²	1,7	3,0	3,0
	μ_g , кгс/м ²	1,7	3,0	3,0
Многослойная конструкция	α , мм	34,5	59,5	59,5
	B_3 , МПа/м	6,25	18,6	18,6
	μ_d , кгс/м ²	10,5	11,8	11,8
	μ_g , кгс/м ²	10,5	11,8	11,8

* Форма снизу и сверху плоская.

** Форма снизу плоская, сверху — трапецидальная. Легкое трапецидальное профилирование, согласно рис. 23, при $s_1=50$ мм, $s_2=10$ мм, $s_3=263$ мм, $h_3=7$ мм.

Для данных многослойных панелей рассчитываются показатели звукоизоляции по "закону массы", а также рассматриваются резонанс и колебания по толщине, которые сравниваются с результатом измерений.

А. Показатели звукоизоляции согласно "закону массы". Уравнение (10.28) при вертикальном к плоскости стены направлении звука ($\varphi=0^\circ$) дает значения, указанные в табл. 10.2.

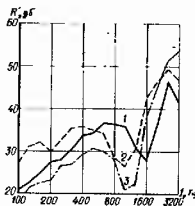
Таблица 10.2. Показатели звукоизоляции для панелей типа "Хбш-изованд" фирмы "Хбш" ("Hoesch")

Звуковая частота, Гц	Показатель звукоизоляции, дБ, для	
	стены 1	стен 2 и 3
100	18,1	19,1
3200	48,1	49,2
Среднее значение	33,1	34,1

Измеренные в нормированном звуковом испытании с широким спектром углов действия звука строительные показатели звукоизоляции R' для всех трех многослойных панелей в зависимости от звуковой частоты f представлены на рис. 72. По ним определены средние значения показателей строительной звукоизоляции R'_m , которые совпадают с расчетными средними значениями R'_m в соответствии с табл. 10.2.

Б. Резонанс. Уравнение (10.51) скорости сдвиговых волн для стены 1 дает $c_k=90,4$ м/с, а для стен 2 и 3 $c_k=111,7$ м/с. Так как во всех трех случаях $c_k \ll 2c_k/3=227$ м/с, то адинаичная жесткость на изгиб B_1+B_2 обоих внешних слоев входит в расчет в качестве величины жесткости много-

Рис. 72. Зависимость показателя звукоизоляции R' многослойных панелей типа „Hoesch-Isowand“ от звуковой частоты f
 1 — для стены 1 с $R'_m = 32$ дБ; 2 — для стены 2 с $R'_m = 34$ дБ; 3 — для стены 3 с $R'_m = 30$ дБ



слойной панели, являющейся определяющей для резонанса. Поэтому уравнение (10.41) при параллельном плоскости стены направлении звука ($\varphi = 90^\circ$) дает следующие предельные резонансные частоты:

стена 1: $f_e = 28780$ Гц;

стена 2: $f_e = 30490$ Гц;

стена 3: $f_e = 2370$ Гц.

Следовательно, у многослойных стен 1 и 2 предельная резонансная частота f_e располагается в редко встречающемся в строительной акустике диапазоне звуковой частоты. У многослойной стены 3, напротив, профилирование внешних слоев вызывает снижение f_e в диапазоне 100—3200 Гц, так что свыше 2370 Гц возможен угол вхождения звука φ , при котором возникает резонанс (а следовательно, и усиленное прохождение звука). f_e соответствует $\varphi = 90^\circ$, большинство звуковых волн при $\varphi = 0, \dots, 60^\circ$ все-таки ударяется о стену. Четкий “резонансный излом” кривой $R = R(f)$ поэтому можно ожидать только после значительного превышения f_e . Следовательно, и в случае стены 3 звукоизоляция снижается незначительно.

Примечания. Если для стены 3 f_e , согласно уравнению (10.41), рассчитать не просто для $B_n + B_s = 72,5$ кгс·м², а определить его точное значение f_e из трансцендентного уравнения** (10.53) для $c^* = c_2$, то получим $f_e = 2239$ Гц. Погрешность приближения составит, следовательно, 5,8%.

В. Колебания по толщине. Уравнение (10.66) при вертикальном к плоскости стены направлении звука ($\varphi = 0$) с учетом массы среднего слоя ($\bar{\mu}_D = \mu_D + \mu_K/6$) дает следующие частоты собственных колебаний по толщине:

стена 1: $f_D = 1584$ Гц;

стены 2 и 3: $f_D = 1176$ Гц.

Эти значения находятся среди часто повторяющегося с точки зрения строительной акустики диапазона звуковых частот и совпадают с измеренными резонансными частотами 1600 и 1250 Гц (см. рис. 72). Они объясняют значительные местные изломы кривых $R = R(f)$. Панель типа “Хёш-изованд” с точки зрения акустики не является, следовательно, однородной стеной.

Для улучшения звукоизоляции многослойной панели и исключе-

* Если точка пересечения прямых $c^* = c_2(\omega)$ на рис. 67 принадлежит оси параллельной оси абсцисс $c^* = c_2 = \text{const}$.

** Если точка пересечения кривой $c^* = c^*(\omega)$ на рис. 67 принадлежит оси параллельной оси абсцисс $c^* = c_2 = \text{const}$.

ния случаев возникновения резонансных колебаний по толщине следует выбирать:

мягкий средний слой, в котором $f_D < 100$ Гц; в смысле статики подобная стена является не многослойной, в двухслойной стеной без несущего среднего слоя, работающего на сдвиг;

анизотропный средний слой, который параллельно стене при статически достаточной прочности на сдвиг достаточно мягок, так что выполняется требование $c_K \leq 2c_L/3$ согласно п. 10.2.3, но вертикально к стене настолько жесткий, что f_D превышает 3200 Гц. При изотропном среднем слое из твердого пенопласта в общем нельзя достичь одновременного выполнения обоих требований $c_K \leq 2c_L/3$ и $f_D \geq 5000$ Гц.

Выводы. Звукоизоляционные свойства многослойных панелей лучше, чем у одинаковых по массе однородных стен; это объясняется тем, что с точки зрения акустики эффективны очень небольшие собственные жесткости на изгиб внешних слоев. Сравнение звукоизоляционных свойств стен различных конструкций в отношении массы, отнесенной к единице площади, представлено на рис. 73.

10.2.5. Поглощение ударного шума в многослойных панелях. Здесь рассматривается возбуждение многослойной панели вследствие ударных волн соударяющегося, отраженного и пропущенного воздушного шума. Звуковые волны распространяются в панели как ударный шум и при этом поглощаются. Поглощение, т.е. частичное превращение механической энергии в теплоту через внутреннее трение, происходит у многослойных панелей исключительно через сдвиговое поглощение в среднем слое. Оно учитывается по уравнению (2.146) через комплексную жесткость на сдвиг $2I = A(1 + i\zeta_K)$ и соответственно комплексный модуль сдвига $G = G(1 + i\zeta_K)$ среднего слоя, где ζ_K — коэффициент потерь в среднем слое при сдвиговом поглощении.

Табл. 10.3 дает значения ζ_K для некоторых материалов¹. Особенно велико поглощение у синтетических материалов, которое сильно зависит от их температуры.

Т а б л и ц а 10.3. Коэффициент потерь ζ_K
для некоторых материалов

Алюминий	0,00007
Сталь	0,0001
Стекло	0,004
Бетон	0,007
Кирпичная кладка	0,010
Древесина хвойных пород	0,012
Полиэтилен	0,04
Плексиглас	0,06
Полиэфирный пластик	0,14
Изоляционная мягковолокнистая панель	0,14
Сополимер винилацетата при 20°C	0,20...0,60

Если надо рассчитать полное сопротивление Z_w многослойной стены с учетом внутреннего поглощения, то в уравнение (10.48) для Z_K , согласно (10.47), спадает подставить только $Z_K(1 + i\zeta_K)$; тогда

$$Z_w = Z_n + Z_D + \frac{Z_S Z_K(1 + i\zeta_K)}{Z_S + Z_K(1 + i\zeta_K)} \quad (10.81)$$

¹ Они примерно такой же величины, как и коэффициент потерь ζ_D комплексного модуля упругости $G = E(1 + i\zeta_D)$ при поглощении растяжения подобных же материалов.

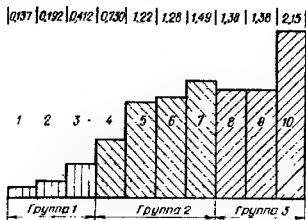


Рис. 73. Соотношение между показателем звукоизоляции (дБ) и массой (кг/м²)

При этом Z_μ , Z_σ и Z_κ , согласно уравнению (10.47), являются чисто мнимыми величинами, так что Z_w есть комплексное число формы $Z_w = A + iB$ при $A > 0$ и $B \neq 0$. Поэтому показатель звукоизоляции R , согласно уравнению (10.49), для многослойной панели с поглощением (что легко проверить вычислением) никогда не может быть равен нулю, так как требование

$$\left| 1 + \frac{Z_w}{2Z_L} \cos \varphi \right| = 1$$

для вещественных значений ω невыполнимо. Следовательно, в зависимости от величины коэффициента потерь ζ_κ имеется более или менее сильный излом кривой $R = R(f)$ в определенном частотном диапазоне, минимум которого держится постоянно выше $R = 0$. О влиянии ζ_κ на величину изоляции от ударного шума было сказано в п. 2.4.2. Большой коэффициент потерь поэтому в известных частотных диапазонах также неблагоприятен, как и меньший.

10.3. ТЕПЛОИЗОЛЯЦИЯ

10.3.1. Основные понятия и основы расчета. Задачей строительного элемента, ограждающего помещение, является в большинстве случаев защита помещения от внешних погодных воздействий и равномерное поддержание нужного климата. Климат помещения определяется в основном температурой помещения и относительной влажностью воздуха. Необходимый климат зависит от назначения помещения. Для холодильников требуется определенная пониженная температура, для жилых помещений — климат, который создавал бы человеку удобства. Так как требования к пространственному климату в жилых помещениях, как правило, наиболее высокие, то в последующем изложении тема теплоизоляции рассматривается на примере жилых помещений. Действующая для этого западногерманская норма ДИН 4108 по вопросу теплозащиты в высотном строительстве рассматривает проблемы теплозащиты в основном с точки зрения стационарного состояния тепловых потоков.

При разности температур $\Delta T = T_i - T_a$ между внутренней и наружной поверхностями однослойной стены с коэффициентом теплопроводности λ^1 материала стены, площадью F и толщиной d в стационарном состо-

¹ Измеряется в ккал/(м²·град/м) = ккал/(м·ч·град).

янии за время t проходит количество тепла

$$Q = \frac{\lambda}{d} F \Delta T t = \Lambda F \Delta T t. \quad (10.82)$$

В уравнении (10.82) $\Lambda = \lambda/d$ — коэффициент теплопроводности¹ однослойной стены. Он показывает, какое количество теплоты в ккал в стационарном состоянии проходит за 1 ч через 1 м² площади стены под действием перпендикулярного поверхности стены перепада температур (температурного напора), если между поверхностями имеется разность температур в 1°С. Обратная же величина ($1/\Lambda = d/\lambda$) называется сопротивлением теплопроводности. Для многослойных стен оно определяется из выражения

$$\frac{1}{\Lambda} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Lambda_j} = \sum_{j=1}^n \frac{d_j}{\lambda_j}. \quad (10.83)$$

Теплообмен между стеной и воздухом происходит через конвекцию и тепловое излучение. При разности температур ΔT между поверхностью стены и воздухом имеет место выражение

$$Q = \alpha F \Delta T t, \quad (10.84)$$

где α — коэффициент теплопередачи² между стеной и воздухом; его обратная величина ($1/\alpha$) называется сопротивлением теплопередаче.

При потоке тепла от воздуха помещения через стену к наружному воздуху или, наоборот, складывается сопротивление теплопроводности и сопротивление теплоотдаче на внешней и внутренней сторонах в общем сопротивление — сопротивление теплопередаче $1/k$; оно составляет

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\Lambda} + \frac{1}{\alpha_a}. \quad (10.85)$$

Его обратное значение называется коэффициентом теплопередачи, с помощью которого получается общее количество проходящего тепла:

$$Q = K F \Delta T t; \quad q = Q/t = K F \Delta T. \quad (10.86)$$

Указанные соотношения служат прежде всего для определения необходимого для здания расхода тепла за время отапливания здания. По ДИН 4701, температура T_i внутреннего воздуха должна равняться 20°С. Но уют в помещении зависит не только от температуры воздуха, но и от температуры внутренней поверхности стены. В табл. 10.4 даны температуры воздуха и стены, при которых гарантируется комфорт в помещении. При температуре T_i внутреннего пространства температура внутренней поверхности стены рассчитывается по формуле

$$T_{iw} = T_i - \frac{k}{\alpha_i} \Delta T. \quad (10.87)$$

Рассмотренное стационарное состояние рассчитывается для зимы приближенно, если внутренние помещения постоянно отапливаются. При периодическом обогреве это состояние нарушается. Точно так же стационарное состояние не наблюдается в летнее время; более необходимо здесь рассматривать уровень внешней температуры с периодом коле-

¹ Измеряется в ккал/(м²·ч·град).

² Измеряется в ккал/(м²·ч·град).

Таблица 10.4. Температурная шкала комфорта

Температура воздуха, °C	12	14	16	18	20	22	24
Температура стены, °C	25	23	21	19	17	15	13

баний 24 ч. Колебание гасится за счет теплоемкости стены, которая зависит от объемной массы материала стены и удельной теплоты материала. Следовательно, у легких стен она меньше, чем у тяжелых. Для легких стен этот недостаток должен компенсироваться более высоким сопротивлением теплопроводности.

Температура поверхности стены важна не только для комфорта, но и для исключения образования конденсата. Если температура поверхности падает ниже точки росы, то на поверхности стены образуется конденсат (табл. 10.5).

Таблица 10.5. Температура точки росы в зависимости от относительной влажности воздуха

Температура воздуха, °C	Температура точки росы, °C, при относительной влажности воздуха, %					
	50	60	70	80	90	100
-10	-17,6	-15,7	-13,9	-12,5	-11,2	-10,0
0	-8,1	-5,6	-3,8	-2,3	-0,9	0,0
10	0,1	2,6	4,8	6,7	8,4	10,0
20	9,3	12,0	14,3	16,5	18,3	20,0
30	16,5	21,2	24,2	26,4	28,4	30,0
40	27,6	30,7	33,5	35,9	38,0	40,0

Если теплоизоляция стены различна по всей площади, то в местах наименьшего сопротивления теплопередаче, например в швах, образование конденсационной влаги возникает в первую очередь. Поэтому необходимо особое внимание уделять тепловым мостикам, возникшим в местах швов. Самую низкую температуру поверхности теплового моста можно рассчитать по формуле

$$T_{lw} = T_i - \frac{k + \frac{1}{2}(k_w - k)}{\alpha_i} \Delta T, \quad (10.88)$$

где k — коэффициент теплопередачи стены; k_w — коэффициент теплопередачи теплового мостика и $\frac{1}{2}$ — коэффициент, находящийся между 0 и 1 и зависящий от соотношения a/d (a — ширина теплового мостика, d — толщина стены) (рис. 74).

Кроме образования конденсата на поверхности стены необходимо учитывать и диффузию водяного пара внутрь стены, вследствие которой возникает градиент давления пара, изменяющийся по толщине стены. Диффузия водяного пара затрудняется или предотвращается посредством торможения пара или преграждением пути для пара, т.е. посредством слоев с большим коэффициентом диффузионного сопротивления водяному пару. Эмпирическое правило: паронепроницаемый слой необходимо расположить на стороне стены с более высокой температурой. Если нельзя препятствовать проникновению водяного пара, то следует позаботиться о том, чтобы пар на противоположной стороне мог быть удален, так как иначе давление, возникающее за паронепроницаемыми слоями, возрастет, что приведет к разрушению.

10.3.2. Применение многослойных строительных элементов. Многослойные панели, представляющие интерес в данном случае, имеют тонкие металлические внешние слои и толстый легкий средний слой из полимерного материала. Коэффициент теплопроводности внешних слоев при этом настолько велик, а их толщина настолько мала, что теплоизоляция многослойных панелей осуществляется только за счет среднего слоя. В табл. 10.6 представлены коэффициенты теплопроводности для некоторых материалов при 20°C.

Таблица 10.6. Коэффициент теплопроводности некоторых материалов

Материал	λ , ккал/ (м·ч·град)	Материал	λ , ккал/ (м·ч·град)
Сталь	47	Пенополистирол	0,028—0,035
Алюминий	195	Пенопласты согласно ДИН 4108	0,035
Дерево	0,12	Углекислый газ	0,14
ПХВ сплошной	0,14	Флуортрихлорметан	0,08
Пенополиуретан 1	0,020—0,030	Воздух	0,022
Пенополиуретан 2	0,032		

Пластические массы обладают значительно меньшей теплопроводностью, чем металлы. Если пластики перерабатываются в пенопласты, то газы в ячейках образуют дополнительную теплоизоляцию. Коэффициент теплопроводности этих вспененных пенопластов зависит от объемной массы пенопаста: чем меньше объемная масса, тем больше значение коэффициента теплопроводности приближается к значению газа, заключенному в ячейках. В табл. 10.6 пенополиуретан вспенен с флуортрихлорметаном, в то время как вариант 2 содержит в своих ячейках лучший теплопроводящий углекислый газ. Так как через стенки ячеек происходит диффузия газа, то теплопроводность пеноматериала увеличивается после производства до тех пор, пока не будет достигнуто стационарное состояние равновесия. При этом важно расположение пеноматериала — свободное или, как в многослойной панели, между диффузионно-плотными внешними слоями. Измерения показали, что у пенополиуретанов объемной массой 30—60 кг/м³ коэффициент теплопроводности не превышает $\lambda = 0,025$ ккал/(м·ч·град), если пеноматериал расположен открыто. При изоляции металлическими внешними слоями этот коэффициент даже меньше, чем $\lambda = 0,020$ ккал/(м·ч·град).

Теплоизоляционные свойства изоляционных материалов резко снижаются, если их полые пространства наполняются водяным паром или водой. Металлические внешние слои, как это принято в технике многослойных конструкций, представляют собой абсолютные паронепроницаемые слои и препятствуют проникновению в материал среднего слоя водяного пара или воды. У "сэндвича" с одним лишь металлическим внешним слоем и с другим внешним слоем из другого материала, например кровельного картона или асбестоцемента, необходимо на основе эксперимента изучить и учесть проблему диффузии водяного пара.

Многослойные стены легкие и обладают незначительной теплоемкостью; это свойство компенсируется за счет повышенного, в противоположность тяжелым стенам, сопротивления теплопередаче. При постоянном температурном режиме не оказывается влия-

ния на теплоаккумулирующую способность. При изменяющихся температурах — наоборот. Например, при периодическом режиме работы системы отопления помещение с легкими стенами типа "сэндвич" нагревается быстрее, чем с тяжелыми стенами, обладающими высокой теплоаккумулирующей способностью. Это имеет преимущество для таких помещений, которые используются лишь в течение определенного времени днем, т.е. для бюро и школьных помещений. Стена типа "сэндвич" выгодна в случае помещений с кондиционированием воздуха, температура которых регулируется и поддерживается с помощью специальных приборов. В помещениях без кондиционирования воздуха, напротив, преимуществом иногда обладают тяжелые стены с хорошей теплоаккумулирующей, так как они вызывают фазовое смещение теплопередачи, т.е. в течение дня отдают внутренним помещениям прохладу, накопленную за ночь, и тем самым частично компенсируют проникновение солнечных лучей и теплого воздуха через открытые окна и двери. Они способствуют, следовательно, снижению разности температурных колебаний.

Теплоизоляция стен и аккумулярование ими тепла должно, следовательно, рассматриваться в связи с вопросами отопления, кондиционирования, солнечного освещения, воздушных потоков в помещении и конкретного использования помещения. Также оказывает влияние аккумулярование тепла стальными строительными элементами (например, междуэтажными перекрытиями) и установленными (например, в производственных цехах) машинами, которые поэтому необходимо учитывать.

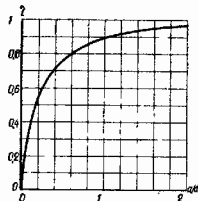


Рис. 74. Коэффициент ζ тепловых мостиков

10.4. ПРОТИВОПОЖАРНАЯ ЗАЩИТА

10.4.1. Основные понятия. В противоположность теориям прочности, звуко- и теплоизоляции при противопожарной защите лишь очень приближенно можно способом расчетов вычислить поведение строительного элемента под огневой нагрузкой, так что сопротивляемость (стойкость) строительного элемента огню обычно определяется путем испытаний этих элементов в естественных условиях. Общие предписания в отношении противопожарной защиты для обычного строительства (жилые дома, административные здания и т.д.) зафиксированы в строительных правилах. И наоборот, в промышленном строительстве до сих пор еще не существует обязательных норм по применению тех или иных строительных элементов и стройматериалов в разных условиях. Запланировано, правда, ввести соответствующие правительственные распоряжения. В настоящее время требования относительно противопожарной защиты при промышленном строительстве устанавливаются от случая к случаю по усмотрению строительных руководящих органов или под влиянием организации по страхованию от пожара.

Требуемые в зависимости от цели применения свойства строительных материалов или элементов, которые в огне определяют свое поведение,

установлены в западногерманских нормах ДИН 4102, на которых кратко остановимся. ДИН 4102 резграничивает строительные материалы, строительные и специальные строительные элементы и классифицирует их следующим образом.

Строительные материалы

Класс А	—	негорючие (например, бетон)
Класс В	—	горючие
Подкласс В1	—	трудновоспламеняемые древесностружечные (например, легкие строительные панели с минеральными вяжущими)
Подкласс В2	—	нормально воспламеняемые (например, древесина толщиной более 2 мм)
Подкласс В3	—	легковоспламеняемые (например, солома, бумага)

Строительные элементы

Класс огнестойкости F 30	—	огнезадерживающие, огнестойкость в течение 30 мин
Класс огнестойкости F 60	—	огнезадерживающие, огнестойкость в течение 60 мин
Класс огнестойкости F 90	—	огнестойкие, огнестойкость в течение 90 мин
Класс огнестойкости F 120	—	огнестойкие, огнестойкость в течение 120 мин
Класс огнестойкости F 180	—	сверхогнестойкие, огнестойкость в течение 180 мин

Специальные строительные элементы

Класс огнестойкости W 30	—	продолжительность огнестойкости 30 мин
Класс огнестойкости W 60	—	продолжительность огнестойкости 60 мин
Класс огнестойкости W 90	—	продолжительность огнестойкости 90 мин

Строительными элементами, по ДИН 4102, считаются несущие стены, потолки, стойки (опоры), балки (прогоны), нижние пояса фермы, лестницы и т.д.

Специальными строительными элементами считаются несущие наружные стены, парпетные стенки и т.д. Для определения строительного материала или элемента по указанной классификации проводится контроль в соответствии с нормированными огневыми испытаниями.

10.4.2. Испытания на огнестойкость. Контрольные условия при огневых испытаниях зафиксированы в ДИН 4102. Для наглядности возьмем три случая: В1, F 30 и W 30.

Строительные материалы. Класс В1

Ставят четыре пробы стройматериалов в щитку с нормированными размерами и точно определенным способом поджигают снизу. Проводят три испытания с тремя различными образцами. Оценка В1 дается при выполнении во всех испытаниях следующих требований:

испытываемые обрезцы должны оставаться неповрежденными по номинальной средней длине 150 мм снаружи и внутри;

средняя температура дымовых газов не должна превышать 250°C.

Строительные элементы огнестойкости F 30

Строительный элемент помещают в огневую камеру и поджигают по заданной температурной кривой, согласно которой температура через 30 мин достигает 820°C. Проводят два испытания двух различных образцов. Оценка класса F 30 дается при выполнении в обоих испытаниях следующих пяти требований:

строительный элемент должен в течение не менее 30 мин задерживать прохождение огня;

на противоположной к огню стороне не должны возникать воспламеняющиеся газы;

на противоположной к огню стороне повышение температуры ни в одной из точек измерения не должно превышать 180°C , а в среднем по всем точкам измерения — 140°C ;

строительный элемент не должен разрушаться под расчетной рабочей нагрузкой;

по окончании огневого испытания стены должны оставаться неповрежденными или с минимальной толщиной прожогов, равной 10 мм, или выдерживать нормированное испытание на прочность.

Специальные строительные элементы класса огнестойкости W30

Специальный строительный элемент вместе с креплениями, опорами и стыковыми швами помещают в огневую камеру. Проводят два испытания двух различных образцов. При этом поджигание осуществляется сначала с внутренней стороны стены с той же температурной кривой, как и для F 30, а потом с внешней стороны стены с сокращенной температурной кривой, согласно которой температура через 10 мин достигает 660°C и затем остается постоянной. Оценка W 30 дается при выполнении следующих требований:

при воспламенении с внутренней стороны должны выполняться те же требования, что и для F 30, но за исключением пп. 3 и 4, так как не нужно проводить температурные измерения на противоположной огню стороне и несущие внешние стены не воспринимают рабочих нагрузок, а несут только сами себя;

при воспламенении снаружи с сокращенной температурной кривой должны выполняться те же без исключения требования, что и для F 30.

Следовательно, условия испытаний для W 30 легче, чем для F 30.

10.4.3. Огнестойкость многослойных панелей. Сопротивляемость многослойной панели с металллическими внешними слоями огню в основном зависит от материала среднего слоя. Если средний слой негорючий и, в зависимости от класса огнестойкости, устойчив до температур $820\text{--}1090^{\circ}\text{C}$, то поведение многослойной панели при пожаре является лишь вопросом теплоизоляции и конструкции стены. Такой случай в практике редок, так как для среднего слоя чаще используются полимерные материалы. При применении минеральных средних слоев, которые выдерживают более высокие температуры, чем синтетические материалы, часто вяжущие материалы или клеевое соединение бывают органического происхождения, а следовательно, не выдерживают высоких температур. Несмотря на это, и в подобных многослойных панелях можно достичь определенной огнестойкости.

В зависимости от применения многослойная панель может испытываться как строительный материал, строительный или специальный строительный элемент. Многослойная панель со стальными внешними слоями и средним слоем из пенополиуретана ("Hoesch-isowand"), которая испытывалась как строительный материал, получила оценку B1, (трудновоспламеняемая). Если ту же самую многослойную панель испытывать в качестве строительного элемента и она будет оценена как

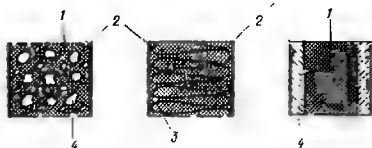


Рис. 75. Средние слои "сэндвич" — конструкций, улучшенные с точки зрения противопожарных свойств
1 — органический материал; 2 — металл; 3 — стекловолокно; 4 — неорганический материал

F30 или W90, то необходимо внести изменения в конструкцию среднего слоя. В расчет принимаются следующие возможности:

применение вместо пенополиуретана для среднего слоя многослойной панели жесткого пенополиизоцианурата с такими наполнителями, как керамзит или пеностекло. Такая многослойная панель имеет уже оценку F30;

применение в качестве среднего слоя жесткого пенополиизоцианурата, который смешивается с измельченным стекловолокном; такая панель имеет оценку как F30, так и W90;

применение многослойного сердечника, например, с минеральной прокладкой между обоими стальными внешними слоями и внутренним средним споем жесткого пенопаста.

Три указанные возможности представлены на рис. 75.

11. ТЕХНОЛОГИЯ ПРОИЗВОДСТВА

11.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Множество вариантов многослойных панелей обуславливает также наличие большого количества технологических методов их изготовления. Способ производства зависит от геометрической характеристики многослойной панели, материалов (которые в свою очередь имеют следствием различные способы соединения) и от некоторых факторов, причины которых техники не касаются, но которые в значительной степени воздействуют на нее. Наиболее существенными факторами этого порядка являются:

количество продукции абсолютное и за единицу времени;

вид продукции и место производства (на строительной площадке, на головном заводе или в небольших разбросанных цехах);

производственно-экономические показатели, такие, как расходы по заработной плате, инвестиции и капитальные затраты.

В противоположность теории сопротивления материалов, которая основана на физических законах и поэтому не подвержена временным изменениям, но может быть усовершенствована благодаря новым познаниям, технологические факторы зависят от экономической структуры и уровня развития экономики страны, т.е. подвержены временным изменениям. Другое зависимое от времени влияние вытекает из технического развития в области материалов, связующих и методов обработки. Часто такое развитие, подгоняемое рационализацией, происходит быстрее, чем развитие научных исследований в области теоретической механики. Все названные факторы не обособлены один от другого, а оказывают взаимное влияние. Кроме этой проблематики, ограничась

лишь несколькими вариантами, необходимо также рассмотреть с технической и экономической точки зрения основы производства, так как они имеют решающее значение для инженерной практики.

С технической точки зрения при производстве многослойных панелей речь идет об обработке и оформлении конструкционных строительных материалов и соединении различных слоев между собой. Для многослойных панелей из одинаковых материалов наряду со склеиванием в качестве техники соединения различных слоев может применяться также и способ сварки. Если исходный материал легко поддается обработке и формовке под давлением, то процесс придания формы включается в процесс производства многослойных панелей. Если материал с трудом поддается обработке, то доведение основного материала до готового к применению полуфабриката осуществляется в другом месте. Далее будут рассматриваться лишь многослойные панели с металлическими внешними слоями и легким средним слоем из различных пенопластов.

11.2. ОСНОВЫ ТЕХНОЛОГИИ ПРОИЗВОДСТВА

11.2.1. Свойства материала внешних слоев и среднего слоя. *Металлические внешние слои.* Технология переработки прежде всего зависит от свойств материала. Металлы являются такими материалами, которые вырабатываются высокоиндустриальным методом производства. В противоположность бетону, который как материал может быть приготовлен непосредственно на месте применения строительного элемента из отдельных компонентов — цемента, воды и различных добавок, металл со своими окончательными свойствами производится на металлургическом комбинате и уже основную свою форму в качестве полуфабриката получает на прокатном стане, который, как правило, является неотъемлемой составной частью металлургического комбината. Этот полуфабрикат в виде профилей, листа или других форм перерабатывается затем в конечный продукт. При производстве многослойных панелей, которые являются плоскими строительными элементами, применяется листовой металлический полупродукт. При последующей обработке материал сам по себе, т.е. его химическая структура, остается неизменным. Обработка ограничивается формовкой металлических листов давлением, если отказаться от влияния формовки на некоторые свойства материалов, как, например, наклеп профилированием или глубокой вытяжкой. Металлические листы могут быть доведены до нужных размеров конечного продукта обрезкой, штамповкой и т.д. или же их форма может быть изменена гибкой, вытяжкой, обжатием и т.д. Основными процессами обработки являются, следовательно, резка и обработка давлением.

Стальные или алюминиевые листы в качестве конструкционного материала для внешних слоев "сэндвича" в большинстве случаев нуждаются в обработке поверхности из-за опасности коррозии, а также в соответствии с архитектурными требованиями, поэтому стальной лист сначала оцинковывается. Для несущих строительных элементов необходима толщина цинкового слоя, наносимого в конвейерной установке горячего цинкования, равная 25 мкм. Для таких конструкций, которые не включены в требования ДИН 4115, например, несущих

внутренних стен, достаточная толщина цинкового слоя — 5 мкм, который наносится электролитически поточным методом. На эти цинковые слои после особой химической предварительной обработки наносится лаковое или полимерное покрытие. Наносить можно вручную кистью или распылением. Но в настоящее время стали обычны конвейерные установки для нанесения покрытий, работающие в непрерывном режиме, которые наносят покрытия на стальные или алюминиевые ленты шириной 1,5 м и более. Наиболее важными видами нанесения покрытий являются:

пакировка в один или несколько слоев с последующей горячей сушкой;

пластизольные или органозольные покрытия, которые после нанесения полимеризуются;

наклейка пеннок.

В качестве материала покрытий применяются термоотверждающиеся паки на основе синтетических смол (например, акрилатных, полиэфирных, эпоксидных или фенольных), термопластичные пластмассы (например, ПВДФ или ПВХ) или пленки (например, из ПВХ, поливинилового волокна или акрилата). Толщина слоя варьируется от нескольких до 500 мкм. Эти покрытия в первую очередь предусмотрены для наружной стороны внешнего слоя "сэндвича". Но для того чтобы при приклеивании внешних слоев к среднему слою из полимерного материала добиться хорошей адгезии, внутренняя сторона внешнего слоя "сэндвича" также должна иметь тонкое лаковое покрытие в виде пленки (лаковое покрытие с последующей горячей сушкой). Этот тонкий слой лака, именуемый пакировкой оборотной стороны, наносится конвейерной установкой параллельно с нанесением пака на внешнюю сторону. Для материала, на который наносится с помощью конвейерной установки покрытие и который без деформации сматывается в рулон и лишь потом формируется гибкой, вытяжкой и обжатием, важно, чтобы эта формовка давлением могла происходить без разрушения покрытия. Указанные виды покрытий соответствуют данному требованию. Для защиты от царапин при обработке или при последующем монтаже строительных элементов металлические листы могут быть также защищены легко снимаемой предохранительной пленкой.

Средний слой из пластмассы. Пластмассы в отличие от металлов имеют более широкий диапазон свойств. Пластмассы — это высокомолекулярные, преимущественно органические соединения, которые получают как из природных, так и синтетических материалов. С точки зрения физического поведения и морфологического строения различают три группы:

пластомеры (широко употребляемое название "термопласты") с линейными нитеобразными макромолекулами;

реактопласты (термореактивные пластмассы) с тесно, в большинстве случаев пространственно "сшитыми" макромолекулами;

эластомеры со свободно "сшитыми" молекулярными цепями. Различие в строении влечет за собой координатное различие в свойствах материала. Пластомеры имеют три диапазона состояния, зависящих от температуры: жесткое, термопластическое и термоупругое. Следовательно, их можно обратимо первично формообразовывать, обрабатывать давлением и соединять с помощью температурной обработки. Реактопласты в техническом диапазоне являются твердыми телами и

возникают вследствие необратимых химических реакций. Производство пластмасс и их формование должны быть, следовательно, объединены в один рабочий процесс.

С точки зрения структуры различаются вспененные пластмассы и пенопласты, которые в технике многослойных конструкций имеют особое значение для строительства. Пенопласты являются синтетическими легкими материалами с пористой структурой; в ячейках присутствует воздух или определенный газ. В большинстве случаев пластмасса вспенивается с помощью физически или химически действующего вспенивающего агента. Различаются следующие виды ячеистых структур: с закрытыми, открытыми и смешанными ячейками. По своим физико-химическим свойствам отформованные пенопласты могут быть жесткими, полужесткими или эластичными. В табл. 11.1 собраны некоторые важные свойства пенопластов.

Таблица 11.1. Классификация пенопластов

Сырье	Образование пластмасс	Физическая характеристика	Структура	Степень твердости
Мочевина-формальдегидные смолы	Поликонденсация	Реактопласт	С открытыми ячейками	Полужесткая
Фенол-формальдегидные смолы	То же	То же	Со смешанными ячейками	Жесткая
Полистирол	Полимеризация	Пластомер	С закрытыми ячейками	"
Поливинилхлорид (жесткий)	То же	То же	С закрытыми или открытыми ячейками	Вязко-жесткая
Полиуретан (жесткий)	Ступенчатая полимеризация	Реактопласт	Со смешанными ячейками	Полужесткая

11.2.2. Формование металлических внешних слоев под давлением.

Способ обработки давлением. Как правило, внешние слои для многослойной строительной конструкции перед ее сборкой доводятся до окончательной формы, необходимой для данного строительного элемента. Для сборки строительного элемента на стройкомбинате многослойные панели получают соответствующее обрамление. По требованиям статике или архитектуры часто соответствующе обрабатывается и сама поверхность. Для обработки листового металла существует много способов. Исходя из условий обработки давлением, рассмотрим здесь формование в одном и двух направлениях, а также полиморфное формование. На рис. 76 показаны все виды формований.

Производство этих форм относится к технологическим методам обработки давлением, которые определены в нормах ДИН В582. При получении внешних слоев для многослойных конструкций методом обработки давлением речь идет о холодной обработке давлением с изменением или без изменения прочностных свойств. Так как изменение прочностных свойств или повышение предела текучести при растяжении в результате наклепа в случае внешних слоев для многослойных конструкций, как правило, не имеет значения, то не будем подробно останавливаться на обработке давлением с изменением прочностных

свойств. Обработка давлением осуществляется формированием материала в пластической зоне. Это пластическое формование может осуществляться обработкой давлением с преобладанием сжимающих, растягивающих или касательных напряжений, а также гибкой или комбинированно. Для видов формования под давлением, согласно рис. 76, имеют место способы обработки с преобладанием растягивающих напряжений, а также гибка.

Формование под давлением в одном направлении достигается гибкой (рис. 77). При гибке поворотным перемещением инструмента металлический лист прочно закрепляется, а свободный край изгибается с помощью поворотной трверсы. Гибку в штампе с помощью прямолинейного перемещения штампа в большинстве случаев называют отгибанием. При этом формируемый металлический лист свободно кладется на нижнюю половину штампа, штамп опускается вниз и придает листу нужную форму. Если изделие должно иметь несколько изгибов, то один за другим производится несколько процессов отгибания. При гибке и отгибании за один рабочий такт через определенный промежуток времени производится одна формовочная фигура. Этот процесс может также осуществляться и непрерывно путем профилирования в вальках. Изгиб металлического листа вдоль одной или нескольких прямых осуществляется парами вальков. Но в данном случае речь идет не о вальцовке с изменением толщины, а лишь о формовке листового металла. Во время процесса обработки давлением металлический лист испытывает нагрузку не только вдоль профилируемого изгиба, но вследствие непрерывного создания кромок от плоского металлического листа к профилю он испытывает также дополнительные нагрузки в плоскости металлического листа. Профилировкой в вальках можно создавать сложные открытые поперечные сечения. Число необходимых для формования пар вальков зависит от формы поперечного сечения, толщины металлического листа и требуемого допуска геометрического размера сечения. Для простой формовки достаточно трех пар вальков, для более сложной последовательно подключается от двадцати клетей и более. Перемещение металлического листа или ленты осуществляется, как правило, самими вальками, причем в движение приводится или каждая клеть, или несколько приводных клетей. Некоторые движущиеся вместе пары вальков расположены в определенном порядке. Одним из вариантов профилирования в вальках является профилирование металлического листа вытяжкой с помощью неподвижных комплектов вальков. При этом металлический лист закрепляется с одного конца и протягивается через комплект вальков. Для профилировки в вальках применяются металлические листы или металлические ленты, т.е. длинные листы, смотанные в рулоны. При непрерывном массовом производстве рулоны с размотателя подаются в профилировочную машину. Формовка гибкой, напротив, может производиться только в случае применения металлического листа.

Вытяжка листового металла, подразделенная на глубокую и обтяжную вытяжку (вытяжка с утонением), отличается от названных способов тем, что формовка проходит не линейно, а по площади. Она входит в категорию пластичного формоизменения с преобладанием сжимающих и растягивающих напряжений. Если площадь поверхности фигуры не изменилась, то говорят о глубокой вытяжке; если площадь увеличилась, то речь идет об обтяжной вытяжке (вытяжке с

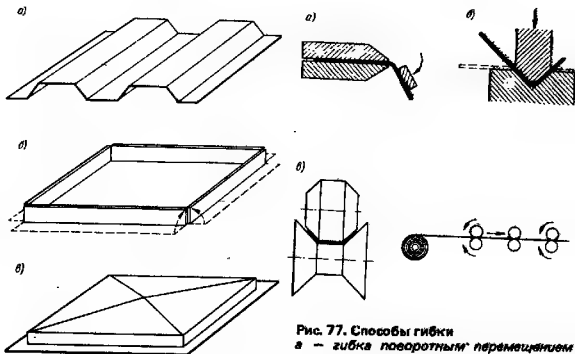
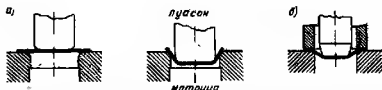


Рис. 77. Способы гибки
а — гибка поворотным перемещением инструмента; б — гибка с помощью прямолинейного перемещения инструмента; в — профилировка в вальцах

Рис. 76. Различные формы изгибов

а — одноосная (стержень); б — двухосная (например, ванна); в — полиморфная (например, пирамида с конусом)

Рис. 78. Способ вытяжки
а — вытяжка без прижима; б — вытяжка с прижимом



утолщением). В случае обтяжной вытяжки одновременно наступает уменьшение толщины листового металла. При способах глубокой вытяжки различается глубокая вытяжка штампом и различными технологическими средами. Для формовки листового металла в качестве внешних слоев многослойной конструкции пригоден только первый способ, схематически представленный на рис. 78. В качестве штампа служит вытяжная матрица (кольцевая вытяжная матрица), куда втягивается металлический лист. Край листа может пезать свободно или держаться прижимом. Процесс формовки производится пуансоном вытяжного штампа.

В противоположность профилировке в вальцах, представляющей собой непрерывный процесс формования, глубокая и обтяжная вытяжки являются стендовыми способами, при которых используются металлические листы. В то время как при гибке и отгибании плоскость металлического листа не изменяется и края остаются прямыми, глубокая или обтяжная вытяжка вызывает вследствие изменения сечения неравномерную волнистость кромки. Эти изменения сечения следует учитывать или посредством применения соответствующих листовых заготовок специально вырезаемых перед глубокой вытяжкой, или дополнительной последующей обрезкой кромок.

Выбор способа обработки давлением зависит от многих факторов.

Форма изделия. Отгибание и профилирование в валках создают только линейное формование в одном направлении; универсальной является глубокая вытяжка. Но возможны комбинации: например, профилирование в валках в одном направлении с последующим отгибанием во втором направлении или гофрированная обжимка в первом рабочем ходе и профилировка краев во втором рабочем ходе. При отгибании длине изделия ограничена шириной машины и длиной применяемых металлических листов. При профилировании это ограничение отпадает, так как материал подается в машину с намотанного рулона. У ванны, изготовленной способом отгибания (см. рис. 76), по углам вертикальных бортов имеются шлицы. Если такие борта загибать кверху, то шлицы закроются.

Стоимость упаковки и инструментов. При отгибании для различных видов кромок необходимо наличие специального инструмента — верхних и нижних половин штампа. Но длина и ширина строительных изделий могут варьироваться в известных пределах, зависящих от размеров металлического листа и машины. При профилировании в валках ширина варьироваться не может, так как профиль, а тем самым и комплект валков неподвижны, длина же произвольная. Другая форма поперечного сечения требует нового или измененного комплекта валков, т.е. создаются затраты на штампы и переоборудование. При глубокой вытяжке штамп можно менять как по длине, так и по ширине. Следовательно, стоимость штампа возрастает с увеличением числа вариантов. Если же комплекты валков или штампы глубокой вытяжки смонтированы как сборные системы, то затраты можно сократить. Необходимо отметить, что способ отгибки пригоден для единичного производства или для большого числа вариантов, профилирование в валках — для серийного производства изделий одинаковой формы поперечного сечения, а вытяжка — для сложных форм и высоких требований (например, закрытые углы) при большом объеме партии изделия.

Затраты по обслуживанию. Так как при отгибании каждая обрабатываемая заготовка должна вставляться в штамп вручную, то рабочее время подготовки заготовки к работе продолжительное, в следовательно, и пропускная способность штампа ограничивается временем, необходимым на обслуживание. Профилирование в валках является непрерывным процессом, который полностью проходит в автоматическом режиме. При вытяжке возможна автоматическая подача обрабатываемого материала, но это требует применения дополнительно специального оборудования.

Качество материала. При отгибании материал сгибается только в одном направлении. При обтяжной вытяжке происходит растяжка материала. Так как при этом возникает многоосное напряженное состояние материала и в зависимости от степени деформации металл испытывает большие пластические деформации, то к материалу предъявляются высокие требования относительно качества. Так как металлы для глубокой и специальной глубокой вытяжек дороже, чем обычный листовой металл или металл для фальцевания, то и этот фактор оказывает существенное влияние при выборе способа переработки. В данном случае преимущественно могут обладать комбинации различных способов.

В заключение необходимо отметить, что для единичного производства наиболее подходящим является отбортовка изделий по заданным раз-

мерам, а при серийном производстве изделий различной длины наиболее перспективным является профилирование.

11.2.3. Обработка пластических масс. Клеевое соединение между средним и внешними слоями. При обработке пластических масс необходимо рассмотреть три стадии:

производство самой пластической массы (первичное формообразование);

формование под давлением;

соединение (сборка).

Если пластмасса находится в готовом к применению виде, то ее остается лишь соединить с внешними слоями. При плоскостном соединении между металлом и пластмассой применяется склеивание с помощью клея. При этом важна двусторонняя совместимость материалов. Клей должен хорошо соединять два материала, не вызывая коррозии. Поэтому преимущественно применяются стальные или алюминиевые листы с нанесенным лаковым покрытием. При соединении клея с пластмассовым средним слоем "сэндвич" важна также химическая совместимость. Часто применяются пластмассы и пенопласты, восприимчивые к растворителю. В этом случае содержащий растворитель клей перед соединением должен выветриться. Еще лучше использовать не содержащие растворитель клеи, которые смешиваются из различных компонентов и после смешивания образуют химическое соединение. Течение такой химической реакции во времени может upravляться составом клея, и, таким образом, время отверждения и допустимое время на обработку (так называемая жизнеспособность) могут быть согласованы с производственным методом. Вследствие затрат на сырье и материалы, а также из-за плоскостности многослойной панели придается значение тому, чтобы клей наносился тонким слоем и равномерно. При небольшом объеме производства это осуществляется с помощью зубчатого шпателя; клей наносится вручную. При большем объеме производства облицовочный материал, который необходимо покрыть клеем, пропускают через валковую машину для нанесения покрытий. После совмещения отдельных слоев панели прессуют в специальных формах до полного отверждения клея. Другой возможностью является применение жесткого клея. При этом между соединяемыми материалами прокладывается термопластическая пленка. В результате нагрева эта пленка принимает свое пластическое соединение и таким образом соединяет слой один с другим. Данный способ склеивания с применением третьего материала можно использовать в случае непосредственного склеивания, если в качестве среднего слоя с самого начала использовать термопласт. Достаточно, если поверхности термопластичного среднего слоя будут нагреваться до тех пор, пока они не станут клейкими. При тонких многослойных панелях с тонким (толщиной всего в несколько миллиметров) средним слоем из пластмассы термопласт в расплавленном состоянии может заливаться на горизонтально расположенный нижний внешний слой. Затем наклеивается верхний слой из листового металла. Затем "сэндвич" охлаждается под сжимающей нагрузкой. Следовательно, данный процесс состоит из соединения и формовки, т.е. метода, для которого подходят термопласты. Реактопласты должны присоединяться или посредством склеивания с помощью третьего материала, или они должны производиться в процессе изготовления самого многослойного строительного элемента. Способ, соединяющий в себе первичное фор-

мообразование, формование и соединение, применяется при производстве пенопластов из полиуретана.

Средний слой из жесткого пенополиуретана. При производстве изделий жесткого пенополиуретана используются различные методы, представленные на рис. 79. Жесткий пенополиуретан получается при смешивании нескольких компонентов. Смесь компонентов вызывает химическую реакцию, в результате которой возникает собственно жесткий пенополиуретан. Основными компонентами являются полиол и изоцианат. Сюда относятся и добавки, такие, как активатор и вспенивающий агент, служащий для вспенивания. Если обработка производится только с двумя компонентами, то добавки к компонентам полиолефина подмешиваются в основном уже заранее. При вспенивании больших количеств из соображений устойчивости и стоимости вспенивающий агент и активатор подмешиваются лишь в перерабатывающей установке в потоке полиолефина или в смесительной головке.

С точки зрения химического процесса существуют два способа. При одноступенчатом способе все компоненты составляются в заранее определенном соотношении и перемешиваются. При двухступенчатом способе полиолефин, предварительно прореагировавший уже в первой ступени с изоцианатом, подается на обработку. При непосредственной переработке во второй ступени остаточное количество изоцианата, а также газообразователь в активаторе также в предварительно заданном соотношении подаются в смесительную камеру. Кроме обычного прямого вспенивания, существует еще и метод предварительного вспенивания — фросинг-процесс. При этом работают с двумя вспенивающими агентами, имеющими различные точки кипения. Первый вспенивающий агент R 12 (точка кипения при атмосферном давлении 760 мм. рт. ст. равна $29,8^{\circ}\text{C}$) расширяется уже непосредственно при выходе из смесительной камеры и создает там сметанообразную смесь. Второй вспенивающий агент R 11 (точка кипения при атмосферном давлении 760 мм. рт. ст. — $23,7^{\circ}\text{C}$) вызывает позднее собственно вспенивание. Пена в результате фросинг-процесса особенно пригодна при образовании сложных форм с небольшими сечениями, так как тем самым достигается равномерное распределение пеноматериала. Временем химического процесса производства пенополиуретана, протекающего экзотермически, можно управлять и прежде всего соответствующим выбором способа, рецептуры и температуры. При переработке различают различные ступени процесса:

время "старта" начинается при перемешивании компонентов и длится до начала увеличения объема смеси; оно может продолжаться 3—120 с;

время "подъема" отсчитывается от начала смешивания до окончания процесса увеличения объема; оно может длиться 25—300 с;

время отверждения — продолжительность от начала перемешивания до окончания прилипания пеноматериала к поверхности, длится 30—500 с.

Важной ступенью способа является смешивание компонентов. При работе на машинах высокого давления смешивание происходит в смесительной камере с помощью обратной инъекции за счет кинетической энергии струи. При работе с машинами низкого давления смешивания происходит с помощью механического перемешивания. Различие между машинами высокого давления и низкого заключается в типе использу-



Рис. 79. Технология производства жесткого пенополиуретана

мых насосов, а не в давлении вспенивания, о котором пойдет речь несколько позже.

Компонентная смесь может распыляться или заливаться. Распыление применяется тогда, когда поверхности, например, резервуара должны быть изолированы слоем пеноматериала. При заливке различают заполнение в открытые формы и закрытые. Заливка в открытые формы, при которой пена заполняет полости в значительной мере без давления, используется в большинстве случаев при производстве пенополиуретановых блоков. Если заливка отверждающейся смеси производится в закрытые формы, то для наполнения в зависимости от размера и формы элемента используется одно или несколько отверстий. Заполнение через эти отверстия в случае больших размеров изделий может осуществляться через трубки (инъекторы), которые через соответствующие выходные отверстия осуществляют распределение смеси. Необходимо заботиться о том, чтобы вытесненный пеноматериалом воздух мог отводиться и не возникали воздушные раковины. При правильном расположении отверстий для наполнения и отвода воздуха можно визуальным проследить, когда будет заполнено полое пространство. В то время как при свободном вспенивании объемная масса пеноматериала определяется только по рецептуре, при вспенивании в закрытых формах заливкой избыточного количества активированной композиции может быть достигнуто увеличение объемной массы пенопласта. Давление, возникающее при вспенивании в закрытых полых пространствах, зависит от степени уплотнения (сжатия). На рис. 80 эта зависимость показана на примере. Избыточное давление, возникающее при вспенивании вследствие заполнения пеноматериалом полый емкости, должно удерживаться ее наружными стенками. При производстве единичного изделия строительная деталь расположена в форме и находится в ней до тех пор, пока не закончится отверждение. Обычное время пребывания — полчаса, но его можно изменить вариацией рецептур. Оно также зависит от температуры. При проектировании непрерывного массового производства изделий строительного назначения стационарная форма может быть заменена подвижной за счет использования двойного пластинчатого транс-

портера. Пластинчатый транспортер поддерживает обе внешние поверхности и имеет боковое кромочное уплотнение. Нанесение отверждающейся жидкости происходит перед пластинчатым транспортером на одной поверхности. Это может осуществляться распылением или литьем. Принцип данного способа показан на рис. 81.

Нижний слой металла разматывается с рулона (1). Затем с помощью распылительной головки, расположенной перпендикулярно движению металлической ленты и перемещающейся по ширине, наносится полиуретановая смесь (2). В то время как пеноматериал набухает, сверху накладывается второй слой металла (3). Проектное расстояние внешних слоев поддерживается пластинчатым транспортером (4). В этом пластинчатом транспортере "сэндвич" отверждается. По боковым кромкам движутся уплотнительные ленты, которые препятствуют выходу с боков пеноматериала. За пластинчатым транспортером "сэндвич" конструкция разрезается на панели нужной длины. Данной установкой непрерывного действия достигаются высокая производительность и равномерное качество, если рецептура пеноматериала, скорость хода установки и температуры в подведенных внешних слоях и в пластинчатом транспортере согласованы одни с другими. Прежде всего температурный режим следует поддерживать постоянным с помощью нагрева и охлаждения.

Вариант принципа производства, представленного на рис. 81, где в качестве одного из наружных слоев применен профилированный лист, показан на рис. 81а. В данном случае полиуретановая смесь наносится не на нижний слой, а на верхний. Если нижний слой является трапециевидным профилем и если толщина слоя пеноматериала соответственно отрегулирована, то пенопласт, остающийся еще вязким и клейким, соприкасается лишь с обращенной к нему горизонтальной частью трапециевидного профиля и склеивается с ней (см. рис. 93 в развороте на 180°), а полые пространства остаются незаполненными. Правда, в этом случае не получают многослойной конструкции, отвечающей теории прочности, рассмотренной в предыдущих главах, но в некоторых случаях из соображений строительной физики подобные панели желательны при наличии небольших статических нагрузок.

Объемная масса, прочность и модель упругости жесткого пеноматериала, его сцепляемость с внешними слоями, временная зависимость разбрызгивания (или впрыскивания) и вспенивания, а также время отверждения можно регулировать соответствующими вариациями компонентов полиолефина и изоцианата, вспенивающим агентом и активатором, соотношением смешивания компонентов, температурой помещения и поверхностью внешних слоев. Наблюдение за этими технологическими параметрами нуждается в тщательном контроле. Контроль пеноматериалов рассматривается в нормах ДИН 18164. Контроль качества начинается с контроля поступившего сырья. Важен также контроль свойств готового жесткого пеноматериала. Это прежде всего объемная масса, прочность на сжатие, устойчивость контура, прочность на разрыв и сцепление с внешними слоями. При испытании продукции разбиваются неразрушающие и разрушающие методы. Для неразрушающего контроля применяется ультразвуковая техника для определения раковин или мест с плохим прилипанием. Сцепление между внешними и средними слоями может также контролироваться с помощью вакуум-колокола. Но все-таки оба метода еще несовершенны и требуют больших затрат.

Рис. 80. Зависимость давления вспенивания от степени уплотнения

x — объемная масса, вспенивание в форме; y —
объемная масса, свободное вспенивание
внутреннее давление в форме (ати)

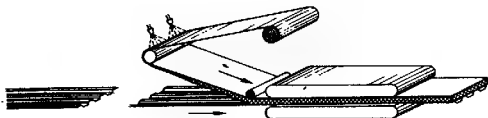
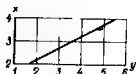


Рис. 81. Пластиновый транспортер

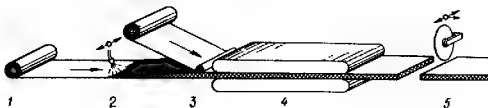


Рис. 81.а. Вариант пластинового транспортера

Более надежным является контроль сцепления и прочности пеноматериала на разрыв (рис. 82). Испытуемый многослойный образец вклеивается между двумя стальными пластинами и затем с помощью испытательной машины разрывается, как показано на рис. 83. Испытание окажется положительным, если разлом пройдет через материал среднего слоя, который обнаружит желаемую прочность. Кроме того, контроль осуществляется в климатических шкафах при температуре от -20 до $+80^{\circ}\text{C}$.

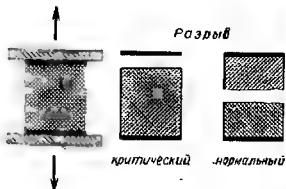


Рис. 82. Контроль прочности на разрыв

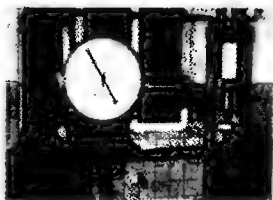


Рис. 83. Машина для испытаний на разрыв

11.3.1. Машины для подготовки внешних слоев. Для внешних слоев многослойных панелей в соответствии со способом формования применяется металл в листах или в рулонах. При единичном производстве целесообразно заказывать металлические листы такого формата, который необходим для готовой конструкции, иначе при обрезке получаются большие отходы. Но при частой смене форматов и для производства с заданным ритмом целесообразно применение полупродукта в форме рулонов. Необходимые листы затем в зависимости от задания могут разрезаться перед формованием. При намотке внутренние слои рулона бывают сильно изогнуты, поэтому необходимо их выпрямление. Комбинированная установка для этих рабочих процессов состоит из разматывателя для приема рулона, правильной машины, где пента правится путем прохождения через несколько валков, ножниц для обрезки или продольного разреза металлической пенты и ножовых ножниц для резки на заданную длину. Транспортировка выправленных и разрезанных листов осуществляется через рольганговый стол. На рис. 84 показана комбинированная установка для разрезания металлических лент на мерные длины со стапельным устройством. Слева направо расположены разматочное устройство, правильная машина для тонколистового металла с 21 правильным валком, запасная кулиса, ножницы для разрезания листа на полосы, отходокрошитель для обрезанных кромок, еще одна запасная кулиса и тормозной агрегат. Отсюда металлическая лента снова сматывается в рулон или подается далее в устройство для разки на мерные длины и штабелирования листов.

Область применения установок роликовой листовой гибки очень велика. Если тонкие металлические листы или ленты должны получить только кромочное профилирование, то для этого достаточно одной профилировочно-гибочной машины. Такие машины используются также для устройства фальцев листового металла и называются кромкозагибочными или фальцовочными машинами. У них профилирующие валки расположены консольно с односторонним креплением на ведомом валу приводного механизма. Их преимущества — в большой сменности: валки легко заменяются и поэтому позволяют производить несложное переоснащение на другие формы профилей. Если необходимо профилировать обе кромки листового металла или металлической ленты, то устанавливают две кромкозагибочные машины, которые (если они будут расположены таким образом, чтобы они могли перемещаться вбок) позволят обрабатывать листовой металл различной ширины (рис. 85).

Если лента по всей ширине должна получить профильное формование, как показано на рис. 99, то для этого необходимы профилировочные валки, расположенные с двух сторон на подшипниках. Такую комбинацию представляет профилировочная машина на рис. 86. Эта установка одновременно профилирует две ленты. Верхняя пента с помощью каждой из девяти пар валков получает с каждой стороны кромочное профилирование. Нижняя пента перед кромочным профилированием еще трапецеидально профилируется тремя парами валков. Эта машина является частью полностью автоматической установки для производства многослойных строительных панелей.

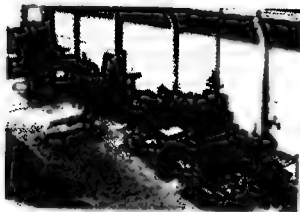


Рис. 84. Установка для разрезания листового металла на мерные длины

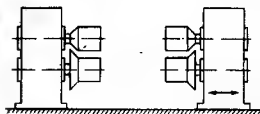


Рис. 85. Кромкозагибочная машина для профилирования краев

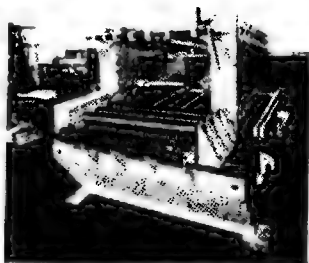


Рис. 86. Профилировочная машина

При прессовании вытяжкой движение происходит с помощью механического или гидравлического привода. По принципу действия различают прессы двойного и простого действия. У прессы двойного действия имеются две отдельно одна от другой движущиеся части, а именно пуансон листодержателя, который прижимает листодержатель к краю металлического листа, и вытяжной пуансон, который собственно осуществляет процесс вытяжки. У прессы простого действия активным является только пуансон. Листодержатель, расположенный на нажимных штифтах, воспринимающих давление, следует этому движению.

11.3.2. Литьевые машины для обработки термопластов. При производстве звукопоглощающих многослойных панелей применяются средние слои из термопластов, которые вводятся методом литья. С помощью рольганга нижний лист "сэндвича" подается под литьевую машину (рис. 87). В этой литьевой машине термопласт для среднего слоя нагревается и наносится через литьевую головку, оснащенную литьевыми губами. Затем наклеивается верхний внешний лист, и полученный таким образом "сэндвич" подвергается дальнейшей термообработке, обработке давлением и охлаждению. На рис. 87 показана термолитьевая машина фирмы "Бюркле" (ФРГ).

11.3.3. Машины для обработки полиуретана. Смешивание компонентов для производства пенополиуретана может в принципе осуществляться вручную, если компоненты смешивать в правильном соотношении. Для промышленного производства используются более точные и

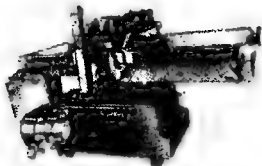


Рис. 87. Термолитьевая машина фирмы "Бюркле" (ФРГ)

производительные машины. Используются машины высокого и низкого давления.

В машинах высокого давления дозировка отдельных компонентов осуществляется с помощью регулируемых поршневых насосов. Два основных компонента смешиваются в смесительной камере при высоком давлении (примерно 100 атм) по принципу противоточной инъекции. Добавка вспенивающего агента и активатора происходит через отдельные насосы. В то время как активатор подается со стороны нагнетания, введение вспенивающего агента осуществляется со стороны всасывания в камере предварительного смешивания. В этой камере смешиваются вспенивающий агент и соответствующий полиолефин.

В машинах низкого давления отдельные компоненты с помощью насоса поддерживаются в постоянной циркуляции между запасником и смесительной головкой. В процессе обработки центральной распределительный запорник открывает клапаны, которые направляют компоненты в смесительную камеру. Давление впрыскивания составляет при этом 4—10 атм. Смешивание обеспечивается высокоскоростной мешалкой.

Принцип работы этих двух видов машин представлен на рис. 88, а их важнейшие признаки отражены в табл. 11.3. Выбор соответствующего вида машин определяется производственными соотношениями, причем факторами, определяющими необходимость использования того или иного вида машины, являются вид рецептуры, число и вязкость компонентов, точность дозировки, подогрев сырья, возможности очистки и другие параметры.

11.3.4. Устройства для производства и обработки многослойных панелей. При вспенивании в закрытых объемах в форму, соответствующую размеру строительной панели, сначала вкладываются внешние слои. В то время как нижний лист плотно прилегает к форме, верхний лист должен поддерживаться на некотором расстоянии от нижнего. Этого можно добиться вложением распорок из пенополиуретана, что требует дополнительной ручной работы и создает места без сцепления между средним слоем и листами, поскольку распорки даже не приклеиваются. При стальных внешних слоях верхний лист удерживается магнитами. В качестве крепления надежнее и более употребительны для немагнитных материалов вакуумные присоски. Если конструктивное решение краев допускает применение краевого (кромочного) профиля, например пластмассовых реек, то этих затрат не требуется. На рис. 89 показаны названные возможности.

Таблица 11.3. Сравнение машин высокого и низкого давлений

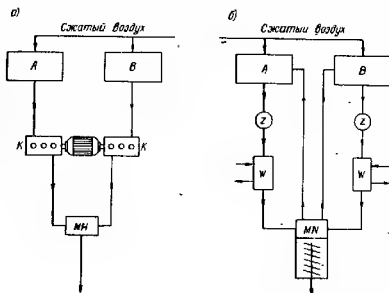
	Машины высокого давления	Машины низкого давления
Напор/рабочее давление, атм Поддача	70—150 Поддача компонентов с помощью поршневых насосов, вследствие этого большая точность дозировки	4—10 Поддача компонентов с помощью шестеренчатых насосов (помп), вследствие этого надежность в работе и невосприимчивость к твердым загрязнениям
Возврат/отвод	Отсутствие возврата компонентов в промежутках между рабочими тактами	Отвод компонентов в промежутках между рабочими циклами
Смесительная камера Возможности увеличения	Малый объем смесительной камеры Дополнительное увеличение на большое число компонентов	Смесительный агрегат увеличивается за счет мешалки Отсутствие возможности увеличения числа компонентов
Вязкость	Ограниченная вязкость компонентов	Возможна обработка высоковязких сред

Так как при вспенивании возникает давление $0,5 \text{ кгс/см}^2$ и более, то здесь достаточно линейное или местное крепление. Между ними сравнительно легко провисающие металлические листы прижимаются давлением вспенивания к форме. Верхняя крышка формы может быть свободной (незакрепленной) и закрываться вручную или с помощью легкого подъемного инструмента, а затем затягиваться. Более просты в управлении механически или гидравлически приводимые в действие откидные крышки (рис. 90).

Если заполняемая пеноматериалом строительная панель имеет краевой профиль, то в этом случае пеноматериал не соприкасается с формой. При открытых краях форма, которая в основном изготавливается из стали, покрывается смазкой или в местах соприкосновения с материалом среднего слоя снабжается специальным покрытием, не вступающим в соединение с полиуретаном. Другим методом является вклеивание полосок из алюминиевой фольги или крафт-бумаги, которые

Рис. 88. Схемы вспенивающих установок высокого (а) и низкого (б) давлений

А, В — смешиваемые компоненты; К — поршневой насос; Z — помпа; W — теплообменник, МН — смесительная камера; МН — смесительная головка с мешалкой



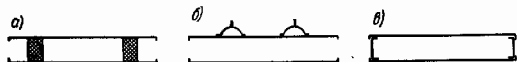


Рис. 89. Фиксация расстояния между внешними слоями в форме для вспенивания. Виды фиксаторов

а — распорки; б — магниты или присоски; в — кривой профиль

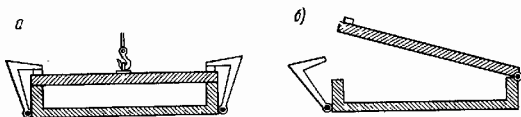


Рис. 90. Крышки форм для вспенивания

а — свободная (незакрепленная); б — откидная

остаются на панели. После закрывания крышки с помощью трубки через одно или несколько отверстий вводится полиуретановая смесь. Число отверстий зависит от заполняемого объема, производительности смесительной машины для производства полиуретана и продолжительности реакции химического процесса. Для строительной панели площадью $5 \times 1 \text{ м}^2$ и толщиной 5 см при производительности машины 200 кг/мин требуется только одно отверстие. Так как время введения при объемной массе 50 кг/м^3 составляет 3–4 с, то время инициирования (активации) составляло бы 10–12 с. Чтобы добиться как можно более непродолжительного периода выдерживания материала в форме, требуется подогрев форм, в которых происходит вспенивание, а также регламентирование времени выдержки, подъема и схватывания в соответствии с размером строительного элемента.

Производство многослойных панелей в поддерживающих формах занимает много времени. Большая производительность достигается в многоярусных формах, где одновременно производится вспенивание нескольких многослойных панелей одних над другими. Здесь необходимо обратить внимание на то, чтобы возникающая во время экзотермической реакции компонентов теплота не приводила к аккумуляции тепла. Иначе необходимо охлаждение в прокладках (слоях). На рис. 91 показана многоярусная форма для многослойных панелей толщиной примерно 60 мм.

При изготовлении панелей в многоярусных формах получается временная концентрация отдельных технологических операций. Этот недостаток ликвидируется с помощью установки, работающей с пульсирующим ритмом. Определенное число отдельных форм приводится в движение по кругу. В первом положении (1) вкладываются облицовки и закрываются крышки, воспринимающие давление вспенивания. Во втором положении (2) вводится полиуретановая смесь. Затем тележка проходит несколько позиций, пока в позиции 5 не закончится процесс отверждения и готовый "сэндвич" не будет вынут из формы. После очистки формы с положения 1 начинается новый оборот тележки. При наличии 6 тележек и одном такте, равном 5 мин, этот оборот длится



Рис. 91. Многоярусные формы

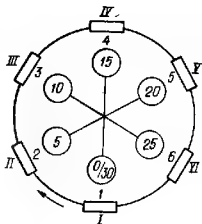
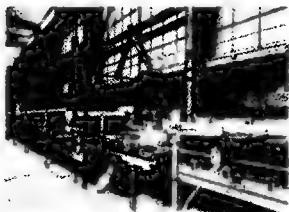


Рис. 92. Циркуляция форм для вспенивания при поточном методе



Рис. 93. Многослойная панель с трапецидальным внешним слоем

Рис. 94. Пластинчатый транспортер



30 мин. Данный цикл схематически изображен на рис. 92. На практике обычно используются прямые пути следования с поперечными механизмами передвижения, т.е. путь следования имеет вид прямоугольника. Римскими цифрами на рисунке обозначены номера тележек, свободные арабские цифры обозначают технические позиции, арабские цифры в круге — временной интервал в отсчете от момента вспенивания. Наряду с возможностью применения передвижных форм для вспенивания можно также располагать формы стационарно, а загрузочное устройство может передвигаться.

О свободном вспенивании при производстве многослойных панелей с двумя внешними слоями не может быть и речи. Свободное вспенивание может быть применено тогда, когда еще при тестообразном и клейком состоянии частично вспененного материала подается второй внешний слой. Приведем два примера. Первый касается вышеуказанного поточного метода: в открытой сверху форме на уже вложенный нижний слой распыляется или заливается жидкая смесь. В следующей позиции материал уже частично вспенен, но еще несколько липкий, т.е. не отвердел. Здесь накладывается второй слой и форма закрывается. Этот способ применяется для "сэндвича", показанного на рис. 93, с трапецидально профилированным слоем, у которого не все поперечное сечение должно заполняться пеноматериалом. Если многослойные панели производятся поштучно индивидуальным или поточным методом, то целесообразно

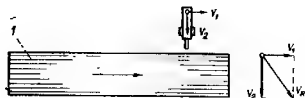


Рис. 95. Принцип действия пилы с односторонним закреплением
 1 — панель пластинчатого транспортера; V_1 — скорость транспортера; V_2 — скорость пилы; V_R — относительное движение

производство деталей унифицированных габаритов. Если все-таки необходима последующая образка, то многослойные панели со стальными или алюминиевыми слоями можно обрезать серийными пенточными или дисковыми пилами, применяемыми при деревообработке. На втором примере показано непрерывное производство многослойных панелей на пластинчатом транспортере (рис. 94), где пила расположена с односторонним закреплением, т.е. во время процесса резки она должна синхронно двигаться со скоростью передвижения пластинчатого транспортера (рис. 95).

11.4. КОМПЛЕКСНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ УСТАНОВКИ

Из множества комбинационных возможностей ранее рассмотренных способов и деталей установок приведем два практических примера производственных установок для изготовления многослойных строительных панелей со стальными или алюминиевыми внешними слоями и средним слоем из жесткого пенополиуретана. В обоих случаях исходным материалом являются стальные или алюминиевые пенты толщиной 0,5—1 мм. Для упрощения в последующем описании ограничимся стальной лентой толщиной 0,5 мм, обработанной способом горячего цинкования со слоем цинка 25 мкм и пленочным покрытием. Покрытие внешней стороны может быть паковым или полимерным. Стороны слоев, обращенные к среднему слою, обработаны паком горячей сушки. Рулоны поставляются массой 300—1000 кг.

11.4.1. Установка, работающая циклически. Рассмотрим сначала производство по заданному ритму. Все установки схематически представлены на рис. 96. Рулон с помощью специального приспособления насаживается на стержень разматывающего устройства. Разматываясь,

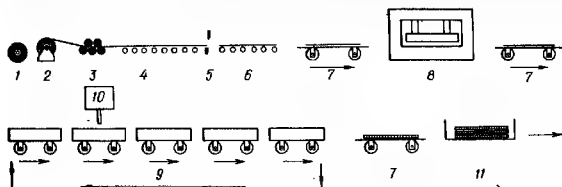


Рис. 96. Штучное производство многослойных панелей

1 — хранения рулонов; 2 — разматывающее устройство; 3 — правильные вальцы; 4 — установка для обрезки кромок; 5 — ножницы; 6 — ролик; 7 — транспортные тележки; 8 — листогибочный пресс; 9 — поточная линия; 10 — машина для вспенивания; 11 — контейнер для перевозки

Рис. 97. Поточная линия производства многослойных панелей



лист с рулона направляется в правильную и обрезавшую установку, как показано на рис. 84. Дальнейшее перемещение происходит с помощью рольгангов и тележек. Формование осуществляется отбортовкой в листогибочном прессе (8) или валками. Описываемая до сих пор область представляет собой обычную обработку листового металла и наряду с собственно производством многослойных конструкций может быть использована также и для других видов производства. Одну из таких областей производства можно, например, использовать для изготовления фасонных деталей, о которых говорится в главе 12. Подготовленные к сборке внешние слои закладываются затем в форму для вспенивания. Этот рабочий такт занимает около 5 мин. С помощью вспенивающей (дозировочной) машины высокого или низкого давления производится заливка полиуретановой смеси. Дальнейший ход соответствует описанному в п. 11.3.4 циклическому методу согласно рис. 92. После изъятия многослойной панели из формы панель упаковывается в контейнеры и транспортируется. На рис. 97 показана установка, работающая по тактам с передвижными формами для вспенивания и машиной для дозировки и смешения.

11.4.2. Установки непрерывного действия. Установка, где технологический процесс в значительной степени осуществляется автоматически, является пластинчатым транспортером для производства панелей типа "Хэш-изованд". Продукт, изготовленный на этой установке, представлен на рис. 98. Ширина b и форма кромки являются постоянными, так что для формования внешних слоев можно применять профилирование в валках. Поверхность внешних слоев выполняется в различных вариантах. Для этой цепи кромочному профилеру предшествует профилирование поверхности. Схематически установка показана на рис. 99. С двух разматывающих устройств верхний и нижний листы подаются в установку двойного профилерования (сдвоенную профилировочно-гибочную установку). Затем с помощью возвратно-поступательных перемещений машины для нанесения покрытий полиуретановая смесь распределяется по нижнему листу. Смесь вспенивается и заполняет пространство между нижним и верхним листами. Пластинчатый транспортер поддерживает соответствующую толщину многослойной ленты до отверждения. Издание имеет несколько вариантов толщины (35, 60 и 120 мм). Для каждой толщины требуется отдельный комплект профилей для движущихся по бокам ограничительных лент. Для предотвращения прилипания пеноматериала к кромочным лентам в качестве прокладки используется совместно перемещающаяся полоска



Рис. 96. Панели типа "Хэш-изованд"
а — многослойная панель; б — варианты внешних слоев

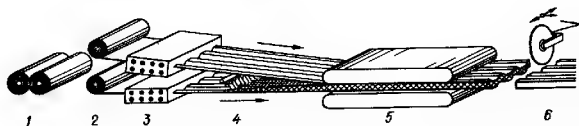


Рис. 99. Установка непрерывного действия для производства многослойных панелей

1 — хранение рулонов; 2 — двойное разматывающее устройство; 3 — профилировочно-гибочная машина; 4 — нанесение пеноматериала; 5 — пластинчатый транспортер; 6 — пила

из алюминиевой фольги или бумаги. Между точками 3, 4 и 5 на рис. 99 для поддержания постоянной температуры писта осуществляется его нагрев или охлаждение. В точке 6 летучей пилой производится распиловка панелей нужной длины. Кроме того, если пила поворотная, то можно производить косую распиловку.

Следовательно, процесс, начиная от разматывающего устройства до распиловки, осуществляется полностью автоматически, и за ним необходимо лишь наблюдать. Связь звеньев автоматической линии происходит за счет самих пистов. В действие приводятся профилировочно-гибочные машины и пластинчатый транспортер; согласование рабочих скоростей может осуществляться с помощью электроники. Ленты внешних слоев должны только протягиваться в пределах установки и никогда не должны испытывать усилия в противоположном направлении движению, так как иначе они сминались бы. Это означает, что пластинчатый транспортер (5) в каждом случае должен двигаться синхронно с профилировочно-гибочной машиной или несколько быстрее, чем она. Если приводимые в движение профилировочно-гибочные машины оснастить обгонной муфтой, то электрическая регулировка станет излишней, так как в этом случае происходит механическая принудительная регулировка. На рис. 100 показано начальное звено установки непрерывного действия для производства панелей типа "сэндвич".

11.4.3. Сравнительная характеристика. Сравнение обоих видов установок, а именно установки, работающей по заданным циклам, и установки непрерывного действия, показывает, что первая требует больших затрат на обслуживание, в то время как на поточной линии как формование внешних слоев под давлением, так и процесс вспенивания происходят в полностью автоматическом режиме. В установке, работающей по циклам, звено, обрабатывающее металлические листы, можно также использовать для производства других строительных элементов из пис-

Рис. 100. Установка непрерывного действия для производства "сандвич"-панелей



тового металла. Так как в системе строительства из многослойных строительных панелей относятся также фасонные части для формирования углов, дверных и оконных соединений и т.д., то в каждом случае необходима производственная зона для обработки металлических листов. Установка непрерывного действия хотя и допускает производственные варианты относительно профилирования внешних слоев, она все-таки является узкоспециальной установкой. Напротив, линия, работающая с заданным циклом, позволяет большее число производственных вариантов, так как формы несколько легче поддаются изменению. При установках непрерывного действия длина плит почти не ограничена; наибольшая длина в основном определяется лишь возможностями транспортировки в пределах завода и в конечный пункт назначения. При установках, работающих с заданным циклом, длина формы для вспенивания определяет и длину конечного продукта. В заключение необходимо сказать, что преимущество установки, работающей с заданным циклом, состоит в ее гибкости и меньших капиталовложениях. Установка непрерывного действия, напротив, является установкой для массового производства продукции с высокой степенью рационализации и автоматизации.

12. КОНСТРУИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ

12.1. КОНСТРУИРОВАНИЕ — ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Задачей конструктора является выполнение с помощью имеющихся материалов всех требований, предъявляемых к конструкции, а также с учетом возможных и наиболее выгодных в отношении цены производственных методов для производства строительной конструкции. В большинстве случаев к конструкционной детали предъявляется ряд требований: необходимая несущая способность; теплозащита, звукоизоляция, огнестойкость и т.д. При удовлетворении всех требований за счет применения одного единственного материала результаты бывают посредственными. Часто избирается такой путь, когда для каждой требуемой функции проектируется оптимальная строительная деталь конструкции. Для крыши, например, которая должна осуществлять ветровую защиту, требуемые несущую способность и теплоизоляцию, обычно применяется устойчивый к коррозии кровельный материал, расположенный на частой сетке несущих стропил, и осуществляется прокладка теплоизоляции. Такое решение, требующее больших монтажных затрат

на строительной площадке, можно рациональнее заменить комбинированными строительными элементами, состоящими из нескольких материалов, но которые будут изготавливаться в виде комплексной конструкции. При этом необходимо осуществить два связанных один с другим процесса установления оптимизации, а именно наиболее правильный выбор материала и лучший метод производства, причем последний зависит также и от требуемого количества. Для конструирования нельзя составить общей программы оптимизации, тем более, чем отдельные требования обладают различным значением: в одном случае на первом месте стоит несущая способность, в другом — звукоизоляция, в третьем — вопрос стоимости и т.д.

Существенной деталью, которая до сих пор рассматривалась лишь попутно, является соединение отдельных деталей конструкции. В данном случае требования, предъявляемые к готовой конструкции, методу производства, транспортировке и стоимости, находятся в тесной взаимосвязи.

12.2. СОЕДИНЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ ДЕТАЛЕЙ

Различают простое соединение без передачи усилия и соединение, воспринимающее внешние усилия. В обоих случаях требуется плотность соединения. Для стен достаточно непроницаемость от ветра и ливня, для наклонных крыш — непроницаемость от дождя, а для плоских крыш ставится требование непроницаемости от воды, скапливающейся на кровле.

Простым видом соединения металлических листов является стык внахлест двух листов с соответствующим оформлением краев. Простое соединение (встык) можно также легко разъединить, как и собрать (рис. 101,а). Если необходимо предотвратить разъединение, то применяется соединение с защелкой (рис. 101,б). Свободный край профилированного металлического листа должен быть не больше 10—15-кратной толщины листа, так как иначе он легко становится волнистым. Часто для стыковых соединений применяются дополнительные профили из того же или другого материала (рис. 101,в).

Для выполнения абсолютно неразъемных соединений применяется фальцевание, состоящее из четырех рабочих приемов: профилирования, сцепления по типу крючков, сбивки и уплотнения. Принцип приемов представлен на рис. 102. Соединения этого вида могут быть очень прочными, особенно если фальцованный шов дополнительно в поперечном направлении выдавливается в виде шва. Но для передачи усилий в несущих строительных элементах и, как правило, недостаточно.

Одним из типов соединения с передачей усилий является склеивание. Клей может быть в виде ленты и заклеиваться между склеиваемыми частями. При этом речь идет или о контактных клеях или о термопластичных пленках, которые достигают своего клеящего действия путем нагревания. В случае жидких клеев различают однокомпонентные клеи, отверждающиеся при уплетчивании растворителя и сушке, и двухкомпонентные клеи, отверждающиеся вследствие химической реакции. Все клеевые соединения восприимчивы к нагрузке, вызывающей неравномерный отрыв. Поэтому клеевые соединения должны быть сконструированы таким образом, чтобы в клеевом шве возникли только срезающие напряжения. Выбор клея определяется видом

Рис. 101. Соединение встык

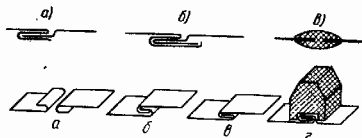
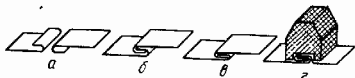


Рис. 102. Фальцевые соединения
а — профилирование; б — сбивка; в — сцепление по типу крючков; г — уплотнение



склеиваемых материалов, их поверхностью, требуемой прочностью при учитываемых температурах и видом монтажа. При высоких требованиях к качеству соединения предъявляются также высокие требования к состоянию склеиваемых поверхностей, прежде всего относительно чистоты и сухости. Такое состояние редко наблюдается на строительной площадке. Поэтому монтажных клеевых соединений без дополнительных механических средств соединения необходимо по возможности избегать.

Наиболее надежными соединениями для строительной площадки являются механические средства соединения, такие, как винты и заклепки. Для тонких металлических листов имеется множество различных заклепочных и винтовых соединений. В ДИН 7516, 7713 и 7981 стандартизированы самонарезающие винты и винты для листового металла (рис. 103). Эти винты применяются без гаек. Металлический лист должен иметь заранее просверленное отверстие, разбу винты нарезают сами. Разработаны также сверлильные винты со сверлильным острием, которые сами просверливают отверстие в тонких металлических листах. Наряду с легким манипулированием такими винтами их преимуществом является то, что они могут быть вставлены без поддержки (прижима), что важно прежде всего для многослойных панелей. Применяя сверлильные винты необходимо обращать внимание на то, чтобы металлические листы при свинчивании плотно прилегали один к другому, так как при одновременной нарезке резьбы не происходит взаимного притяжения металлических листов. Поэтому лучше, чтобы верхний лист и при работе со сверлильными винтами предварительно рассверливался или пробивался несколько больше, по возможности в процессе производства на фабрике, вследствие чего четко устанавливается и расстояние между винтами. Путем специальной формы сверлильной и самонарезающей части винтов для листового металла можно также при ввинчивании снова разрушить резьбу в верхнем листе, в результате чего возможно подтягивание металлических листов.

Если крепление к одному металлическому листу должно осуществляться с недоступной стороны обычными винтами с метрической резьбой, то применяют глухие гайки. На рис. 104 показана однозаклепочная гайка. При затягивании винта стержень вставленной гайки высаживается, образуя кольцевую волну. Кроме того, имеются приварные гайки и разбóвые втулки с напедками, которые располагаются на листе, пока оборотная сторона еще доступна.

Другим видом механического соединения являются заклепки для листового металла, которые, как и винты для листового металла, вставляются без поддержки (прижима). Эти заклепки — полые, чтобы на противоположной стороне можно было разогнуть края стержня. При насечной заклепке просечного штифта штифт, загнанный в отверстие,

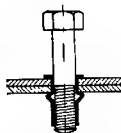
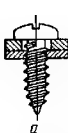


Рис. 103. Винты
а — для листового металла; б — само-
нарезающие; в — сверлильные

Рис. 104. Глухая
однозаклепочная
гайка

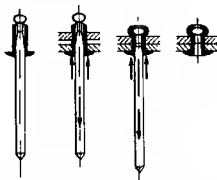


Рис. 105. Глухая заклепка

расплюсчивает стержень на противоположной стороне. В строительстве очень часто применяют глухие заклепки. После введения попой заклепки и при одновременном ее прижмие стержень вытягивается, образуя вторую головку заклепки (рис. 105).

При выборе материала для средств соединения необходимо обращать особое внимание на предохранение его от коррозии. Стальные винты должны быть по крайней мере оцинкованы, лучше всего использовать нержавеющую инструментальную сталь. Заклепки изготавливаются из стали, алюминия, латуни, монель-металл и других сплавов. При различных материалах конструктивных деталей и средств соединения необходимо следить за тем, чтобы не возникала контактная коррозия. Для оцинкованного стального листа подходит монель, сплав Fe, Ni, Cu и Mg.

К технике соединения листового металла относятся также сварные соединения, полученные путем точечной и роликовой электросварки. Прежде всего они подходят для заводского производства.

12.3. ОБРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУФАБРИКАТОВ МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ

Полуфабрикатами многослойных панелей называют плоские листы с гладкими краями, пригодные для широкого использования, но требующие дополнительной обработки. Рассмотрим два вида многослойных панелей:

звукопоглощающую многослойную панель из стальных или алюминиевых внешних слоев и тонкого термопластичного массивного среднего слоя общей толщиной до 15 мм;

многослойную панель с внешними слоями толщиной 0,5 мм из алюминия и средним слоем из полиэтилена общей толщиной до 12 мм.

Рис. 106. Виды соединений для звукоизоляционных панелей

а — утопленный винт; б — сварка среднего слоя; в — соединение с помощью пластмассовых профилей

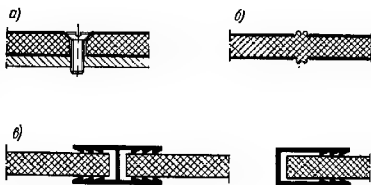


Рис. 107. Виды соединений для звукопоглощающих панелей (типа "Бондал")

1 — двухточечная сварка; II — сварка плавлением



На рис. 106 показано несколько примеров техники соединения звукоизоляционных панелей. Наряду с подобными соединениями звукопоглощающие писты Бондала со стальными внешними слоями соединяют дополнительными профилями, гибкой и свинчиванием, а также свариванием. Для этого пригодны контактная сварка в форме точечной, рельефной роликовой электросварки или электросварки плавлением, но не газовая сварка. Необходимо учитывать, что промежуточный слой из пластмассы действует как электрический изолятор, который, однако, распадается при высоких температурах. Конструкция должна учитывать эти свойства материала. Элементы жесткости или детали крепятся точечной сваркой к внешнему слою (рис. 107). Прохождение тока при контактной электросварке показано на рисунке пунктиром. При соединении двух металлических листов встык провар обоих внешних слоев с одной стороны не целесообразен, так как средний слой сгорает и вследствие этого возникает звуковой мостик. Кроме того, качеству сварного шва наносится вред за счет промежуточного слоя из пластмассы.

Рассмотренные полуфабрикаты "сэндвичей" можно не только соединять встык, но и формовать. С помощью роликовых и барабанных ножниц они разрезаются; могут также отделяться круглой (дисковой), пенточной пилой или узкой ножовкой; они могут отбортовываться и поддаются глубокой вытяжке. В зависимости от размера даны некоторые ограничения, но с этими полуфабрикатами можно в основном обращаться, как с обычными металлическими пистами. Таким образом, они обладают обычными преимуществами металлических листов и некоторыми преимуществами пластмассы, особенно относительно звукопоглощения и небольшой массы.

Существенное различие между многослойной поглощающей панелью и "сэндвичем" заключается в характере промежуточного слоя из пластмассы. Для звукопоглощающих панелей применяется вязкоупругий температур, например 0–60°C обнаруживает высокий коэффициент поглощения (см. пп. 1.4.2 и 10.2.5). Этот комбинированный пист в первую

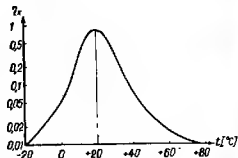


Рис. 108. Коэффициент потерь панели типа "Бондал"



Рис. 108. Корпус компрессора из звукопоглощающих многослойных листов

очередь разработан для поглощения колебаний при динамических процессах, в то время как жесткость стоит лишь на втором месте. Если эту конструкцию рассматривать как однородный строительный материал, то его коэффициент потерь z_k , как правило, находится в пределах 0,2—0,6. Но z_k можно также довести до 0,9. В таких случаях прочность среднего слоя на сдвиг снижается до 0,4 кгс/см². На рис. 108 показана зависимость характеристики коэффициента потерь от температуры T для симметричного "сэндвича" с 0,5-мм внешними слоями из стальных листов и средним слоем из пластмассы толщиной 0,3 мм при частоте звуковых колебаний 1000 Гц. В то время как применение звукопоглощающих многослойных листов в большинстве случаев зависит от листового пластикового полупродукта, многослойную панель можно считать строительной. Эта строительная панель характеризуется прежде всего небольшой массой (1—1,5 кгс/дм³), причем благодаря строению "сэндвича", обеспечивается значительная жесткость. Прочность среднего слоя из полистилена на растяжение при $\sigma_{\text{ср}} = 100$ кгс/см². При коэффициенте потерь 0,05 "сэндвич" имеет значительно лучшие поглощающие свойства, чем массивный алюминиевый лист, но все-таки не достигает таких благоприятных показателей, как звукопоглощающая панель. Напротив, оптимальными являются благоприятное соотношение жесткости к собственной массе и присущее материалу внешних слоев (алюминию) качество поверхности.

Многослойные листы применяются в качестве звукопоглощающей обшивки от источников шума, в виде загрузочных воронок для сыпучих материалов, дверных филенок и т.п. В таких случаях многослойный лист заменяет массивный листовой металл и настолько облегчает перестройку с массивного листа на многослойный, насколько его можно формовать и обрабатывать, как обычный металлический лист. Пример использования показан на рис. 109, где представлен корпус компрессора. Панели типа "сэндвич", напротив, находят применение в качестве строительной панели для фасадов и внутренних стен облицовки потолка или материала для шкафов и других изделий.

12.4. МНОГОСЛОЙНЫЕ СТРОИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И СООРУЖЕНИЯ ИЗ НИХ

12.4.1. Стеновые панели для промышленных цехов. Для стен промышленных цехов справедливы следующие требования:

ограничение пространства за счет плоских панелей с различными вариантами техники исполнения и отделки поверхности;

тепло- и звукоизоляция;

прочность к ветровым нагрузкам;

сопротивление удару;

легкая транспортировка и быстрый монтаж;

легкая заменяемость при реконструкции.

Многослойная панель с лакированными или полимерными покрытиями металлических внешних слоев и со средним слоем из пластмассы оптимально удовлетворяют этим требованиям. Размер элемента определяется следующими условиями:

шириной исходного полупродукта материала для внешних слоев; ограничением размеров элемента с учетом транспортировки и возможностями монтажа;

простой сборкой на стройплощадке.

Исходя из ширины ленты внешних слоев, массы на единицу площади ($8-10 \text{ кгс/м}^2$), ограничения длины подачи до $10-12 \text{ м}$ и нормальной высоты здания до 10 м , получаем оптимальные размеры элемента: ширина $0,6-1,5 \text{ м}$, длина до $10-12 \text{ м}$.

Металлические внешние слои можно легко отбортовывать (загибать), фальцевать или формировать посредством профилирования с помощью валков. Таким образом, предоставлена большая свобода во внешнем формировании края. Профилирования валками благоприятно с точки зрения стоимости массового производства, но оно позволяет производить формирование под давлением только в одном направлении.

Результаты разработки конструкций краев и швов многослойных панелей представлены на рис. 110. Панель типа "Hoesch-isowand" с внешними слоями из листовой стали с паковым покрытием горячей сушки "Pladur", с пластмассовым покрытием "Platal" или с алюминиевыми внешними слоями имеют ширину 1 м . Сборная стеновая панель "Luxalon" фирмы "Хантер Дуглас" ("Hunter Douglas") с алюминиевыми внешними слоями, покрытыми лаком горячей сушки, имеет ширину $0,6 \text{ м}$. Толщина внешних слоев из стали составляет $0,5 \text{ мм}$, из алюминия — $0,8 \text{ мм}$. Оба типа многослойных стеновых панелей производятся со средним слоем из жесткого панополиуретана. Остановимся на технике соединения и монтажа этих двух типов стеновых панелей.

Боковые края многослойных панелей профилированы таким образом, чтобы образовалось соединение в шпунт и гребень (рис. 111), которое замыкается простой вставкой панелей. Горизонтальные стыки этих профилированных панелей создаются путем гладких распилов. Так как панели производятся длиной $10-12 \text{ м}$, то стыковые соединения, показанные на рис. 112, встречаются сравнительно редко. Крепление стеновых панелей к факверку может осуществляться с помощью винтов, которые проходят через "сэндвич". В этом случае головка винта закрывается пластмассовым колпачком. Конструктивно лучшим является невидимое крепление клеммой, вставляемой в паз (шпунт) и

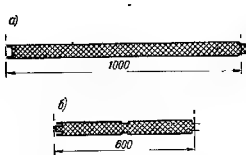


Рис. 110. Стеновые панели многослойной конструкции для промышленных предприятий

а — панель типа "Хёш-изованд";
б — панели типа "Луксалон"

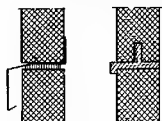


Рис. 112. Горизонтальное соединение встык панелей

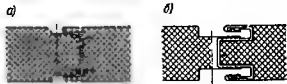


Рис. 111. Стыковое соединение в шпунт и гребень

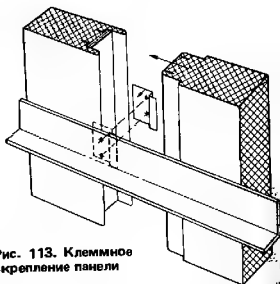
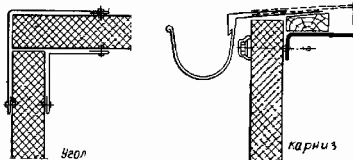


Рис. 113. Клемное скрепление панели

звинчиваемой с нижней конструкцией. Этот вид крепления показан на рис. 113. Другие конструктивные детали представлены на рис. 114 с замыканием (герметизацией) угла и карниза. Для конструктивного исполнения нижних опорных узлов и карнизов, для углов, а также для дверных и оконных соединений необходимы фасонные детали. Обычно они производятся из того же материала, из которого сделаны внешние слои многослойной панели. Для часто повторяющихся форм, таких как углы, фасонные детали могут быть стандартизированы. Но иногда нельзя отказаться от специального исполнения. Поэтому в большинстве случаев эти профили производятся гибкой.

При конструировании многослойных строительных элементов и зданий из них необходимо также учитывать допуски. С одной стороны, опорная конструкция, служащая для опирания на нее стеновых панелей, может быть выполнена неточно; с другой стороны, сами строительные элементы могут не обладать точными размерами. Между обоими отклонениями имеется существенное различие. В то время как неточности в размерах в строительстве составляют сантиметры, при серийно изготовленных многослойных строительных панелях с металлическими внешними слоями следует рассчитывать на диапазон миллиметровых допусков или еще меньший. Допуски по длине стены здания лучше всего компенсируются в швах с помощью уплотнительной прокладки из мягкого пенопаста. Перед монтажом рекомендуется разметить положение вертикальных швов, так как последующее смещение панелей затруднительно. При больших отклонениях или при заппанированной пригонке панели можно распиливать на стройплощадке.

Рис. 114. Присоединительные детали для промышленного строительства



Теплоизоляционные свойства многослойных панелей обеспечиваются за счет среднего слоя из жесткого пенополиуретана. Эти свойства характеризуются значением k , которое зависит от толщины стены. Значения k для двух описанных типов стен приведены в табл. 12.1. Мостики холода в швах не учитываются, так как внешние слои не имеют металлических соединений между собой. У сборной стеновой панели "Luxalon" при температурах воздуха снаружи -24°C и внутри помещения $+21^{\circ}\text{C}$ температура стены в середине панели составляла 19°C , температура шва была на 1°C ниже, т.е. 18°C .

Т а б л и ц а 12.1. Коэффициенты теплопередачи

Тип панели	Толщина, мм	Значение k , ккал/(м ² ·ч·град)
"Хёш-изованд"	35	0,64
"	60	0,39
"	120	0,20
"Ауксалон" (сборная стеновая)	50	0,43

Так как звукоизоляция зависит от массы и жесткости стены, а именно при небольшой массе стены она невелика, то между требованиями небольшой массы, большой жесткости и хорошей звукоизоляции можно найти лишь компромисс. При звукоизоляции 32–34 дБ и массе стены 10–12 кг/м² панель типа "Hoesch-isowand" благодаря описанному поглощающему эффекту среднего слоя наиболее эффективна среди всех многослойных панелей по сравнению с одинаковыми по массе однородными стенами.

Свободный пролет между опорами панелей наряду со свойствами материала и размерами поперечного сечения зависит от статической схемы опирания (одно- или многопролетной) и ветровой нагрузки как функции высоты здания. При ветровой нагрузке 60 кгс/м², которая имеет место при высоте зданий до 8 м, расстояние между опорами для однопролетной балки составляет 3,4 м в случае панели типа "Hoesch-isowand" толщиной 35 мм и 4 м для стены толщиной 60 мм.

12.4.2. Стены для административных и жилых зданий. В разработанной фирмой "Йозеф Гартнер" ("Josef Gartner") фасадной конструкции используются преимущества техники многослойных конструкций. Эта конструкция состоит из панелей типа "сэндвич", расположенных между прямоугольными трубчатыми опорами. "Сэндвич" состоит из двух стальных внешних слоев, один из которых имеет покрытие из пластика на основе поливинилхлорида ("Пптал Т"), чрезвычайно устойчивого к атмосферным воздействиям. Данный внешний слой получен

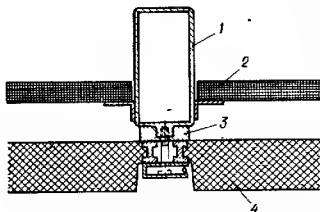
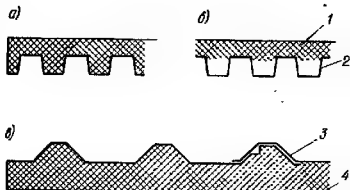


Рис. 115. Разрез фасада из многослойных конструкций
1 — полый профиль факверка; 2 — асбестоцемент; 3 — неопрен; 4 — "сэндвич"-конструкция

способом глубокой вытяжки и имеет форму ванны (см. рис. 76), поэтому у него нет свободно лежащих кромок распила. Детали многослойной панели наполняются в многостажной форме жестким пенополиуретаном, который вспенивается. Они обладают высокой теплоизоляцией и паронепроницаемостью. Благодаря профилям из неопрена можно избежать мостика холода в местах соединений. Так как звукоизоляция легкого многослойного элемента при высоких требованиях часто недостаточна, то на внутренней стороне предусмотрена дополнительная асбестоцементная плита, которая своей массой создает дополнительную звукоизоляцию и накопление тепла. Особенностью конструкции является совмещение фасадной конструкции с системой отопления. В полых профилях факверка циркулирует теплый воздух или вода, поэтому они являются нагревательными элементами. Одновременно циркулирующая в профилях вода является противопожарным средством. Техническое преимущество данной системы заключается в том, что стеновых элементов не только не являются мостиками холода, а напротив, они являются источниками обогрева стены. Летом с помощью этой системы можно добиваться также обратного эффекта, а именно охлаждения. На рис. 115 представлен поперечный разрез фасада, разработанного фирмой "Гартнер".

12.4.3. Конструкция крыши. Требования, предъявляемые к плоским строительным элементам для крыш, отличаются от требований, предъявляемых к стенам. Во-первых, швы необходимо предохранять не только от пивня, но и от воды вообще, а во-вторых, конструкция должна быть способна принимать увеличение и продолжительные нагрузки. Последнее обстоятельство необходимо учитывать постопьку, поскольку легкий средний слой из пеноматериала под действием нагрузки поддается деформации ползучести. Желательно при нагрузках на крышу не только учитывать несущую способность многослойной конструкции в целом, но и выбирать комбинацию несущей способности конструкции и собственно несущей способности внешних слоев. Пример кровли, где несущая способность обеспечивается только профилированным внешним слоем, представляет собой кровлю из панелей типа "Purclad" фирмы "Империял Кемикал Индустри" ("Imperial Chemical Industry") (рис. 116,е). В статическом смысле это многослойная конструкция типа "сэндвич". Функции несущей способности, теплоизоляции и уплотнения выполняются здесь единственным многослойным элементом. В данном случае имеется преимущество серийного производства на фабрике и простого монтажа. Трапецидальные профили из стали или алюминия

Рис. 116. Кровельные профили многослойной конструкции
1 — герметизирующая пленка; 2 — стальной лист; 3 — алюминиевый лист; 4 — пленка



действием усилий могут изменять несущую способность вследствие потери устойчивости элемента профиля, т.е. выпучивания с небольшими волнами элемента поперечного сечения, работающего на сжатие, или сжатие при изгибе. Средний слой "сэндвича", напротив, действует при этом как элемент, придающий жесткость. Таким образом, при варианте "а" (рис. 116) несущая способность всей панели больше, чем при том же несущем профиле без сердечника из пеноматериала.

Следующим шагом является "сэндвич" трапецидального профиля фирмы "Хёш" ("Hoesch"). В нем объединены жесткость профиля и жесткость всего "сэндвича". В результате бокового соединения внахлестку верхнего внешнего слоя создано простое и надежное уплотнение швов. Для избежания поперечных стыков возможно и предусмотрено производство наибольших для обычных кровель длин, т.е. примерно до 18 м. Для рассмотрения надежности конструкции рассматривают два предельно неблагоприятных условия: общая нагрузка кровли, состоящая из собственного веса и враненной нагрузки, распределяется на трапецидальные профили из стали, причем несущая способность стального листа устанавливается с учетом исключения опасности потери устойчивости. При разрушении среднего слоя или соединения между средним и внешним слоями в результате пожара собственный вес кровли должен восприниматься одними внешними слоями без учета подкрепления средним слоем. Многослойные панели трапецидальных профилей при обычных нагрузках на кровлю могут перекрывать пролеты между опорами до 10 м. Больших пролетов между опорами можно достичь увеличением толщины среднего слоя из пеноматериала и увеличением глубины профиля. Толщина металлического листа ограничена возможностями поставки оцинкованной металлической пенты. Верхний предел толщины составляет 2 мм, обычная толщина металлического листа составляет до 1,5 мм. Эффективность толщины среднего слоя из пеноматериала ограничена соображениями надежности. Кроме того, толщина среднего слоя, которая значительно превышает необходимую для обеспечения теплоизоляции, неэкономична. Верхний предел толщины составляет примерно 120 мм. Увеличение глубины профиля достигает своего предела при максимальной ширине оцинкованной металлической ленты, которая обычно составляет 1,5 м.

При слегка профилированных внешних слоях, таких, как, например, у панелей типа "Hoesch-Isowand" или у сборной становой панели "Luxalon", жесткость достигается за счет несущего действия "сэндвича". В случае трапецидального "сэндвича", согласно рис. 117, общей жесткости содействует как несущее действие самого "сэндвича", так и



Рис. 117. Многослойная панель трапеци-
дального профиля

собственная жесткость внешних слоев. Если при ограничении толщины внешних и среднего слоев глубина профиля увеличивается примерно до 1000 мм, то жесткость почти исключительно создается за счет профиля, причем жесткость поперечного сечения придается за счет несущего действия "сэндвича". В этом случае говорят о многослойной складчатой конструкции типа "сэндвич". На рис. 118 показано разграничение понятий. Границы их расплывчаты и могут быть условно намечены лишь по договоренности. Определение "плоская многослойная панель" совершенно ясно. О "сэндвиче" с профилированными внешними слоями следует говорить в том случае, если внешние слои слегка профилированы, но собственная жесткость этих слоев не имеет существенного влияния на общую жесткость. Профилированный "сэндвич" имеет место в том случае, если жесткость внешних слоев находится в пределах жесткости самого "сэндвича". При многослойной складчатой конструкции типа "сэндвич" жесткость самого "сэндвича" по сравнению с жесткостью внешних слоев настолько мала, что ею можно пренебречь.

Примеры исполнений многослойных кровельных панелей и многослойной складчатой конструкции представлены на рис. 119 и 120. Складчатая конструкция на рис. 120 имеет толщины $a=60$ мм, высоту профиля $h_p=1200$ мм и ширину нижнего горизонтального пояса $b=1400$ мм. Проблема деформации ползучести в среднем слое из пеноматериала исключена, так как средний слой служит исключительно для придания жесткости, а не для передачи усилия сдвига. Другим вариантом является изогнутый "сэндвич" с профилированными внешними слоями согласно рис. 121. Изгиб этой кровельной панели для шедовых покрытий не имеет статического действия, так как панель выполняет несущее действие в качестве балки на двух опорах, а не как свод-оболочка.

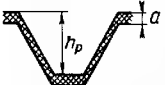
Поперечное сечение	Наименование	Обеспечение жесткости за счет
	Плоская многослойная панель типа "сэндвич"	"Сэндвича"
	"Сэндвич" с профилированными внешними слоями	"Сэндвича"
	Профилированный "сэндвич"	"Сэндвича" и профили
	Многослойная складчатая конструкция типа "сэндвич"	Профиля

Рис. 118. Виды многослойных несущих конструкций



Рис. 119. "Сэндвич" трапецидального профиля в качестве кровельной панели

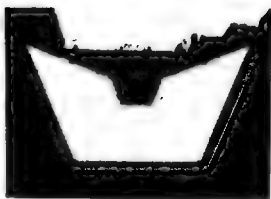


Рис. 120. Многослойная складчатая конструкция в форме лотка

Рис. 121. Щедовое покрытие из многослойной панели с профилированными внешними слоями



При проектировании пространственной плоской несущей конструкции, которая для длительной основной нагрузки получает состояние мембранного напряжения, с помощью техники многослойных конструкций можно достичь больших пролетов между опорами. Примером этого является купол из многослойных конструкций, построенный фирмами "Хёш" ("Hoesch") и "Бейер" ("Bayer") в 1970 г. на выставочной территории в Ганновере (ФРГ). Геометрическая форма купола — сфери-

Рис. 122. Купол из многослойных панелей, построенный в Ганновере (ФРГ)

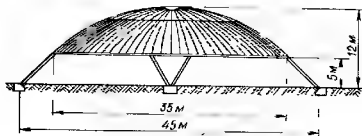


Рис. 123. Поперечные сечения элементов свода-оболочки
а — поперечное сечение элемента; б — поперечное сечение стыка

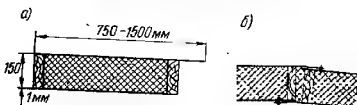




Рис. 124. Форма для вспенивания элементов для свода-оболочки

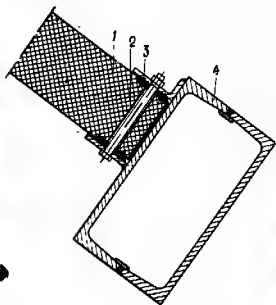
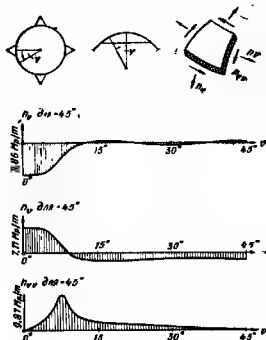


Рис. 125. Крепления многослойных элементов к несущему кольцу
1 — элемент оболочки; 2 — труба (распорка); 3 — глухая заклепка; 4 — несущее кольцо

ческий сегмент, расположенный на расстоянии 5 м от земли на четырех опорах (рис. 122). Расстояние между опорами составляет 45 м, общая высота 12 м. Несущая конструкция состоит из четырех наклонных V-образных опор из стальных профилей, несущего коробчатого кольца и собственно купола. Купол состоит из 40 отдельных сегментов (крупных элементов свода-оболочки). Каждый из этих элементов по технологическим причинам имеет лишь один изгиб, а именно по меридиану. По соображениям транспортировки и производства каждый крупный элемент состоит соответственно из трех малогабаритных элементов. Поперечное сечение малого элемента, а также стык между двумя крупными элементами показаны на рис. 123. Производство 120 малых элементов осуществлялось в формах, как показано на рис. 124. Через два загруженных отверстия полов пространства объемом $1,6 \text{ м}^3$ заполнялось пенополиуретаном, при этом давление вспенивания на форму составляло 1—2 атм. Время отверждения до выемки элементов из формы составляло около 5 ч.

Внешние слои состоят из оцинкованной листовой стали "Pladur" толщиной 1 мм с нанесенным лаковым покрытием горячей сушки. В нижней зоне свода-оболочки поверх опор расположены только оцинкованные металлические листы толщиной 2 мм, так как листовой металл толщиной 2 мм с лаковым покрытием не входит в обычную производственную программу производителей лент с нанесенным покрытием. В данном случае, чтобы добиться хорошей адгезии пеноматериала, нанеслось вещество, повышающее прочность сцепления. На стройплощадке перед началом монтажа купола три малых элемента (сегмента) сначала монтировались в один большой. Масса такого сегмента площадью 26 м^2 составляет примерно 1050 кг при внешних слоях толщиной 1 мм и примерно 1450 кг при внешних слоях толщиной 2 мм. 40 крупногабаритных элементов устанавливались автокраном на несущее кольцо и вспомогательные подмости. Купол закрывался с помощью круглой замыкающей детали на стыке свода. Так как элементы имеют лишь по одному изгибу, то несущее кольцо является многоугольником.

Рис. 126. Срезающие усилия в свода-оболочке при симметричной нагрузке (собственный вес + снег = 100 кгс/м²)



Соединение элементов осуществлялось с помощью простого стыка внахлестку, как показано на рис. 123. Передача усилий происходит через глухие заклепки диаметром 4,8 мм, несущая способность которых 134 кгс. Расстояние между заклепками составляет 25—100 мм. Полое пространство стыка после совмещения (пригонки) элементов заполнялось пенополиуретаном. Так как строительство происходило зимой, то требовался подогрев внешних металлических листов нагревательными матами, чтобы удалить влагу с металлических листов и получить оптимальную температуру, необходимую для процесса вспенивания. На рис. 125 показано крепление сферического свода-оболочки к несущему кольцу.

При расчете параметров купола необходимо было учесть два критерия, а именно восприятие срезающих нагрузок и устойчивость всей несущей конструкции. Прежде всего статика оболочки включает состояние мембранного напряжения по обычной теории мембран. Вытекающие отсюда срезающие нагрузки воспринимаются одними внешними слоями. Непряженное состояние краев вследствие разности деформации между оболочкой и несущим кольцом определялось по теории изгибов, причем в данном случае также важны деформации сдвига среднего слоя. Характеристика некоторых срезающих усилий показана на рис. 126. За поведением купола ведутся наблюдения в течение продолжительного времени путем регулярных тригонометрических измерений в общей сложности 15 отмеченных точек купола. За два года никаких остаточных деформаций обнаружено не было.

12.5. ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ

В заключения необходимо наметить основные возможности для развития других видов конструкций многослойных панелей и их пределы. Из-за небольшой массы и большой жесткости многослойные конструкции особенно подходят для несущих конструкций с большими

пролетами. Так как "сэндвич" — панели со средним слоем из жесткого пеноматериала — одновременно обеспечивают и теплоизоляцию, то многослойная панель является важным строительным элементом для экономичного сборного строительства. Но часто прямой путь введения новой технологии и нового способа строительства нарушается тем, что с ним связываются слишком большие и неоправданные ожидания. Точно так же, как с помощью предварительно напряженного бетона нельзя добиться изоляции против ударного шума или строить мосты с помощью пластмассовых профилей, так и многослойные строительные конструкции, несмотря на множество их хороших качеств, ограничены в своем применении. Прежде всего это касается многослойных строительных элементов со средним слоем из пластмассы. Пластические массы, применяемые с экономической и технической точек зрения, обладают ползучестью и мало устойчивы при высоких температурах. Влияние ползучести можно уменьшить соответствующей формой конструкции. Но с помощью многослойных панелей нельзя, например, создать брандмауэр, если даже при выборе соответствующего материала могут быть получены средние значения огнестойкости. Обширный диапазон возможных комбинаций материалов и конструктивных форм оставляет еще большое поле деятельности для изобретательской мысли конструктора.

1. Dundrová, V., V. Kovařík und P. Šlapák: Biegungstheorie der Sandwichplatten. Prag: Academia-Verlag; Wien-New York: Springer. 1970.
2. Neuber, H.: Theorie der Druckstabilität der Sandwichplatte. ZAMM **32**, 325–337 (1952); **33**, 10–26 (1953).
3. Szabó, I.: Einführung in die Technische Mechanik, 7. Auflage. Berlin-Heidelberg-New York: Springer. 1966.
4. Teichmann, A.: Statik der Baukonstruktionen. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1956.
5. Rottmann, K.: Mathematische Formelsammlung. Mannheim: Bibliographisches Institut. 1960.
6. Szabó, I.: Höhere Technische Mechanik, 5. Auflage. Berlin-Heidelberg-New York: Springer. 1972.
7. Stamm, K.: Erzwungene, gedämpfte, quasistationäre Schwingungen von Balken auf nachgiebigen Stützen mit nichtlinearer Federkennlinie. Düsseldorf: VDI-Verlag. 1968. (Fortschrittsberichte, Reihe 4, Heft 9).
8. Rothe, R.: Höhere Mathematik, Teil III. Leipzig: B.G. Teubner. 1962.
9. Shun Cheng: Torsion of Sandwich Panels of Trapezoidal, Triangular and Rectangular Cross Sections. US Navy, Bureau of Aeronautics, Series ANC-23, Item 57-4, Report No. 1874.
10. Girkmann, K.: Flächentragwerke, 6. Auflage. Wien: Springer. 1963.
11. Betonkalender 1972. Berlin-München-Düsseldorf: W. Ernst & Sohn.
12. Stamm, K., and H. Witte: Aufstellung einer allgemeinen Plattentheorie für Sandwichplatten. Hoesch, Berichte aus Forschung und Entwicklung unserer Werke **4**, 122–136 (1969).
13. Plantema, F.J.: Sandwich Construction. New York-London-Sydney: J. Wiley & Sons. 1966.
14. Stamm, K.: Berechnung der Knitterspannungen bei ebenen und trapezprofilierten Sandwichplatten. Hoesch, Berichte aus Forschung und Entwicklung unserer Werke **5**, 173–184 (1970).
15. Klöppel, K., und J. Scheer: Beulwerte ausgesteifter Rechteckplatten. Berlin: W. Ernst & Sohn. 1960.
16. Stamm, K.: Grundsatzversuche an ebenen und trapezprofilierten Sandwichbalken. Hoesch, Berichte aus Forschung und Entwicklung unserer Werke **5**, 185–201 (1970).
17. Kurtze, G.: Physik und Technik der Lärmbekämpfung. Karlsruhe: G. Braun. 1964.
18. Eisenberg, A.: Untersuchung über die Schalldämmung leichter Wand- und Deckenkonstruktionen. Köln: Westdeutscher Verlag. 1967.
19. Hieke, H.: Beitrag zum Deformationsverhalten und zur Technologie der Kunststoffe. Dissertation TH Aachen. 1968.
20. Dau, G.: Wärmeschutz, Schallschutz, Elektrotechnik, Heidelberg: A. Rausch. 1970.
21. Davidovici, P.: Chauffage et Ventilation des Piscines. Industrie Thermiques **8**, 33–43 (1962).
22. Eichler, F.: Bauphysikalische Entwurfslehre, Band I und II, 3. Auflage. Köln-Braunsfeld: Verlagsgesellschaft R. Müller. 1970.
23. Cammerer, J.S.: Wärme- und Kältetechnik in der Industrie, 4. Auflage. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer. 1962.

24. Grüner, P.: Verarbeitungsmethoden an Feiblechen. Maschinenmarkt 298-308 (1962).
25. Schuler, L.: Handbuch für die spanlose Formgebung, 4. Auflage. Göppingen: L. Schuler AG. 1964.
26. Kraft, K.J.: Kontinuierliche Herstellung kaschierter Wärmedämmplatten aus Polyurethan-Hartschaumstoff. Kunststoffe im Bau 4, 42-44 (1967).
27. Brochhagen, K.H.: Hartes Moltopren, ein Polyurethanschaum für Wärme- und Kälteisolierung. Kunststoffe 51, 246 (1961).
28. Vleweg, R., und A. Hoschtl: Kunststoff-Handbuch, Band IV (Polyurethane). München: C. Hanser. 1966.
29. Klinkosch, R.: Eigenschaften und Verarbeitung von Kunststoff-Hartschäumen unter besonderer Berücksichtigung von Polyurethan-Hartschaum. Hoesch, Berichte aus Forschung und Entwicklung unserer Werke 4, 150-163 (1972).
30. Beratungsstelle für Stahlverwendung: Merkblätter Nr. 174 (Falzen von Stahlblech), Nr. 382 (Kleben von Stahl) und Nr. 386 (Fügeverfahren für feuerverzinktes Feiblech). Düsseldorf, 1970 und 1971.
31. Matting, A.: Metallkleben. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer. 1969.
32. Gladischefski, H.: Schnellbefestiger, mechanische Verbindungselemente für Blechkonstruktionen. Der Deutsche Baumeister 333-338 (1969), 568-572 (1969).
33. Becker, H.: Das Widerstands-Kondensatorimpuls- und Hochfrequenzschweißen an Pletal. Schweißtechnik, Widerstandsschweißen II 35, 107-119 (1963).
34. Kohtz, D.: Umformen und Schweißen von schalldämmenden Verbundblechen. Schweißen und Schneiden 20, 72-77 (1968).
35. Ihlefeld, J., P. Koch und W. Tappe: Bondal, ein Werkstoff zur Lärmbekämpfung Aufbau, akustisches Verhalten, Verarbeitung, Anwendungen. Hoesch, Berichte aus Forschung und Entwicklung unserer Werke 3, 99-108 (1973).
36. Kirchner, H.: Ein Verbundwerkstoff für den Leichtbau. Aluminium 45, 226-229 (1969).
37. Hofmann, A.: Neuartige Verbundwerkstoffe aus Metall und Polyäthylen. Kunststoff 59, 85-88 (1969).
38. Jungbluth, O.: Sandwichflächentragwerke im konstruktiven Ingenieurbau. Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften, Vorträge N 208. Opladen: Westdeutscher Verlag. 1971.
39. Jungbluth, O.: Stahl/Kunststoff-Sandwichtchnik, eine neue Bautechnologie. Industriespiegel 21, 73-81 (1970).
40. Witte, H.: Eine neuartige Sandwichkuppel auf dem Messegelände in Hannover. Acier Stahl Stell 35, 361-365 (1970).
41. Giencke, E.: Ein einfacher Stabilitätsnachweis für Schalen aus Hoesch-Sandwich-elementen. Hoesch, Berichte aus Forschung und Entwicklung unserer Werke 4, 109-116 (1969).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие	5
Основные обозначения, используемые в тексте	6
Буквенные обозначения для расшифровки знаков формул	7
1. Введение	8
1.1. Объяснения понятий	8
1.2. Свойства многослойных панелей	8
1.3. Несущая способность многослойных панелей	9
1.4. Расчет многослойных панелей на прочность	12
1.5. Акустические, теплоизоляционные и огнезащитные свойства многослойных конструкций	15
1.6. Производство многослойных панелей	16
1.7. Разработка многослойных панелей, создание конструкций на их основе и области их применения	17
1.8. План последующих глав	17
2. Изгиб многослойных балок с плоскими тонкими внешними слоями	18
2.1. Дифференциальные уравнения и граничные условия	18
2.2. Примеры многослойных балок, на которые действуют поперечные нагрузки	30
2.3. Энергетический метод	45
2.4. Другие виды напряженных состояний	54
2.5. Дополнения	72
3. Изгиб многослойной балки с плоскими толстыми или профилированными внешними слоями	77
3.1. Дифференциальные уравнения и граничные условия	77
3.2. Примеры многослойных балок, на которые действуют поперечные нагрузки	87
3.3. Выражения энергии и энергетический метод	92
3.4. Другие виды напряженных состояний	94
3.5. Дополнения	101
4. Кручение многослойных балок	104
4.1. Кручение без бимомента многослойных балок с плоскими тонкими внешними слоями	104
4.2. Кручение без бимомента многослойных балок с профилированными тонкими внешними слоями	111
4.3. Кручение без бимомента многослойных балок с плоскими толстыми внешними слоями	113
5. Изгиб многослойных панелей с плоскими тонкими внешними слоями	116
5.1. Дифференциальные уравнения и граничные условия	116
5.2. Примеры многослойных панелей с нагрузками, действующими в поперечном направлении	132
5.3. Энергетический метод	143
5.4. Другие виды напряженных состояний	145
5.5. Дополнения	147
6. Изгиб многослойных панелей с плоскими толстыми или профилированными внешними слоями	149
6.1. Дифференциальные уравнения и граничные условия	149
6.2. Пример многослойных панелей, на которые действуют поперечные нагрузки: изотропная многослойная панель с усилением краев, шарнирно-опертая по контуру	157
6.3. Энергетический метод	159
6.4. Другие виды напряженного состояния	160
6.5. Дополнения	161
7. Общей потеря устойчивости многослойных балок и панелей	162
7.1. Общие положения	162
7.2. Многослойные балки с плоскими тонкими внешними слоями	163
7.3. Многослойные балки с плоскими толстыми или профилированными внешними слоями	168

7.4. Многослойные панели с плоскими тонкими внешними слоями	171
7.5. Многослойные панели с плоскими толстыми или профилированными внешними слоями	178
8. Местная потеря устойчивости (смятие) в многослойных балках и панелях	179
8.1. Общие положения	179
8.2. Коэффициент жесткости среднего слоя	182
8.3. Смятие внешних слоев	168
8.4. Дополнения	196
9. Статические и динамические испытания многослойных строительных элементов	205
9.1. Цель испытаний многослойных строительных элементов	205
9.2. Статические испытания многослойных строительных элементов	206
9.3. Динамические испытания многослойных балок	215
9.4. Испытания многослойных панелей термической нагрузкой	216
9.5. Измерения значений постоянных упругости материала среднего слоя	218
9.8. Результаты испытаний многослойных балок с металлическими внешними слоями и средним слоем из пенополиуретана	222
9.7. Выводы на основе испытаний о поведении полимерного материала среднего слоя многослойного образца	226
10. Акустические, теплоизоляционные и огнезащитные свойства	227
10.1. Общие положения	227
10.2. Звукоизоляция и звукопоглощение	228
10.3. Теплоизоляция	249
10.4. Противопожарная защита	253
11. Технология производства	256
11.1. Основные положения	256
11.2. Основы технологии производства	257
11.3. Машины и детали установок	268
11.4. Комплексные производственные установки	274
12. Конструирование многослойных панелей	277
12.1. Конструирование — задача оптимизации	277
12.2. Соединения многослойных строительных деталей	278
12.3. Обработка и применение полуфабрикатов многослойных панелей	280
12.4. Многослойные строительные элементы и сооружения из них	283
12.5. Перспективы развития	291
Список литературы	293

К. Штамм, Г. Витте

МНОГОСЛОЙНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Редакция переводных изданий

Зав. редакцией Р.Л. Рощина

Редактор Т.Н. Носик

Мл. редактор Л.Г. Безлецов

Технический редактор Е.Л. Темкина

Корректоры: В.И. Гелюзова, Е.Р. Герасимюк

ИБ № 2674

Подписано в печать 28.08.81 Формат 60х90 1/16 Бумага офсетная № 2

Печать офсетная Набор машинописный Печ. л. 16,5

Усл. кр.-отт. 18,88 Уч.-изд. л. 18,46 Тираж 4000 экз. Изд. № АУШ-8640

Зак. № 307 Цена 2 р. 80 к.

Стройиздат, 101442, Москва, Каляевская, 23а

**Тульская типография Союзполиграфпрома при
Государственном комитете СССР по делам издательства,
полиграфии и книжной торговли
г. Тула, пр. Ленина, 109**